



# ANÁLISE DE ESTRUTURAS I

Apontamentos sobre análise de lajes

Grupo de Análise de Estruturas  
Departamento de Engenharia Civil  
Instituto Superior Técnico, 2018



Estes apontamentos, da autoria de Vitor MA Leitão e de Luís MSS Castro e com a colaboração dos restantes elementos do grupo, foram elaborados no seio do Grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil, Arquitectura e Georrecursos do IST para apoio às aulas da disciplina de Análise de Estruturas I do Mestrado Integrado em Engenharia Civil.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Lajes - conceitos básicos . . . . .	1
1.2	Definição do modelo estrutural de análise de lajes . . . . .	4
1.3	Classificação das lajes face ao comportamento estrutural . . . . .	8
1.4	Breve resenha de métodos de análise de lajes . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Lajes de Kirchhoff - Formulação do problema</b>	<b>11</b>
2.1	Lajes de Kirchhoff - Hipóteses simplificativas . . . . .	12
2.2	Definição das grandezas estáticas e cinemáticas . . . . .	14
2.2.1	Definição do campo de deslocamentos . . . . .	14
2.2.2	Definição do campo de deformações . . . . .	16
2.2.3	Definição do campo de esforços . . . . .	20
2.2.4	Recuperação das grandezas tridimensionais* . . . . .	25
2.3	Relações Fundamentais . . . . .	29
2.3.1	Condições de compatibilidade . . . . .	30
2.3.2	Condições de equilíbrio . . . . .	31
2.3.3	Obtenção das condições de equilíbrio* . . . . .	32
2.3.4	Relações de elasticidade . . . . .	34
2.3.5	Significado físico das relações constitutivas . . . . .	34
2.3.6	Obtenção das relações de elasticidade* . . . . .	40

2.4	Equação de Lagrange . . . . .	41
2.5	Definição das condições de fronteira . . . . .	44
2.5.1	Bordos encastrados . . . . .	44
2.5.2	Bordos simplesmente apoiados . . . . .	48
2.5.3	Bordos livres . . . . .	50
2.6	Identificação de soluções exactas . . . . .	59
2.7	Distribuições de esforços equilibradas . . . . .	69
2.8	Campos de deslocamentos compatíveis . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Análise elástica de lajes finas</b>	<b>87</b>
3.1	Flexão de vigas . . . . .	87
3.2	Lajes rectangulares em flexão cilíndrica . . . . .	89
3.2.1	Lajes rectangulares em flexão cilíndrica - solução geral . . . . .	91
3.2.2	Lajes rectangulares apoiadas em todo o contorno - aproximação a flexão cilíndrica . . . . .	95
3.3	Flexão simétrica de lajes circulares . . . . .	95
3.4	Análise de lajes finas - caso geral . . . . .	97
3.4.1	Solução analítica . . . . .	97
3.4.2	Soluções em forma de série . . . . .	102
3.4.3	Soluções em forma de tabela . . . . .	105
3.5	Soluções não exactas . . . . .	106
3.6	Análise de lajes vigadas contínuas . . . . .	110
3.6.1	Resolução analítica de lajes contínuas . . . . .	111
3.7	Lajes apoiadas em pilares - lajes fungiformes . . . . .	112
<b>A</b>	<b>Lajes finas em coordenadas polares</b>	<b>113</b>

# Lista de Figuras

1.1	Placa e laje - estruturas laminares planas. . . . .	2
1.2	Casca/membrana - estruturas laminares não planas. . . . .	2
1.3	Comportamento de laje. . . . .	3
1.4	Placa traccionada. . . . .	4
1.5	Apoios em pórticos planos. . . . .	5
1.6	Apoios elásticos em pórticos planos. . . . .	5
1.7	Deslocamentos admissíveis em pórticos e em lajes. . . . .	6
1.8	Representação de apoios em lajes. . . . .	7
1.9	Bordos elásticos. . . . .	7
1.10	Representação esquemática das condições de apoio, [6]. . . . .	8
2.1	Ilustração das hipóteses de Kirchhoff . . . . .	13
2.2	Determinação do campo de deslocamentos . . . . .	14
2.3	Campos de deslocamentos numa laje de Kirchhoff . . . . .	15
2.4	Deslocamento de corpo rígido . . . . .	18
2.5	Campos de deslocamentos com curvaturas de flexão unitárias . . . . .	18
2.6	Campo de deslocamentos com curvatura de torção unitária . . . . .	19
2.7	Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo $x$ .	20
2.8	Esforços $m_{xx}, m_{xy}$ e $v_x$ positivos . . . . .	21
2.9	Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo $y$ .	22
2.10	Esforços $m_{yy}, m_{xy}$ e $v_y$ positivos . . . . .	23

2.11	Campos de esforços numa laje de Kirchhoff . . . . .	24
2.12	Definição da mudança de coordenadas . . . . .	24
2.13	Distribuição das tensões $\sigma_{xx}$ , $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{xy}$ na espessura . . . . .	27
2.14	Distribuição das tensões tangenciais $\sigma_{xz}$ e $\sigma_{yz}$ na espessura . . . . .	29
2.15	Grandezas a conhecer para se caracterizar o comportamento de lajes finas .	30
2.16	Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de laje . . . . .	33
2.17	Conjunto de vigas com eixo paralelo ao eixo $x$ . . . . .	36
2.18	Deformação por flexão das vigas com eixo paralelo ao eixo $x$ . . . . .	37
2.19	Deformação da secção transversal . . . . .	37
2.20	Deformada das secções transversais . . . . .	38
2.21	Momento a aplicar segundo a direcção transversal . . . . .	38
2.22	Grandezas e equações fundamentais nas lajes de Kirchhoff . . . . .	42
2.23	Tipos de apoios a considerar . . . . .	44
2.24	Laje rectangular com todos os bordos encastrados . . . . .	45
2.25	Condições de fronteira a considerar ao longo do bordo I . . . . .	45
2.26	Condições de fronteira a considerar na laje com todos os bordos encastrados	46
2.27	Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado inclinado . . . .	47
2.28	Mudança de coordenadas . . . . .	47
2.29	Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado . . . . .	48
2.30	Laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno . . . . .	48
2.31	Condições de fronteira a verificar numa laje rectangular simplesmente apoiada	49
2.32	Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado . . . .	49
2.33	Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado inclinado	50
2.34	Laje com bordos livres . . . . .	50
2.35	Condições a considerar no bordo III . . . . .	51
2.36	Esforços transversos e momentos torsores no bordo III . . . . .	52
2.37	Equivalência estática no bordo III . . . . .	52



2.38	Aparecimento de forças de canto no bordo III . . . . .	53
2.39	Determinação do valor das forças de canto . . . . .	53
2.40	Equivalência estática em toda a laje . . . . .	54
2.41	Valor das forças de canto em toda a laje . . . . .	54
2.42	Equivalência estática ao longo do bordo III com momento torsor variável . . . . .	55
2.43	Variação do momento torsor entre fatias adjacentes . . . . .	55
2.44	Determinação do valor de $\bar{f}_z$ . . . . .	56
2.45	Equivalência estática na laje . . . . .	57
2.46	Condições de fronteira a verificar em bordos livres . . . . .	58
2.47	Condições de fronteira na laje da figura 2.34 . . . . .	58
2.48	Definição da laje a analisar. . . . .	60
2.49	Campo de deslocamentos transversais . . . . .	60
2.50	Cargas na laje simplesmente apoiada. . . . .	63
2.51	Campo de rotações . . . . .	63
2.52	Campo de curvaturas de flexão. . . . .	64
2.53	Campo de curvaturas de torção . . . . .	65
2.54	Campo de momentos flectores. . . . .	65
2.55	Campo de momentos torsores. . . . .	66
2.56	Campo de esforços transversos. . . . .	67
2.57	Distribuição dos esforços transversos efectivos nos bordos da laje. . . . .	67
2.58	Reacões de canto no elemento de laje. . . . .	68
2.59	Laje rectangular simplesmente apoiada . . . . .	70
2.60	Diagramas de momentos $m_{xx}$ e $m_{yy}$ . . . . .	73
2.61	Viga para obtenção de $m_{xx}$ . . . . .	73
2.62	Viga para obtenção de $m_{yy}$ . . . . .	74
2.63	Laje rectangular com tipos de apoios diferentes . . . . .	75
2.64	Elementos de viga para a determinação dos campos de momentos flectores . . . . .	76

2.65	Vigas equivalentes . . . . .	84
3.1	Deformada de uma viga. . . . .	88
3.2	Deformada da secção transversal de uma viga. . . . .	88
3.3	Vigas lado a lado. . . . .	89
3.4	Deformada de laje sob flexão cilíndrica. . . . .	90
3.5	Laje rectangular longa. . . . .	90
3.6	Laje rectangular longa encastrada num dos bordos maiores e apoiada no bordo oposto. . . . .	92
3.7	Deformada e distribuição de momento $m_{xx}$ correspondente à solução com- plementar genérica, ou seja, em função das constantes $C_1$ a $C_4$ . . . . .	92
3.8	Deformada e distribuição de momento $m_{xx}$ correspondente à solução par- ticular . . . . .	93
3.9	Deformada e distribuição de momento $m_{xx}$ correspondente à solução com- plementar . . . . .	94
3.10	Sobreposição das soluções particular e complementar. . . . .	94
3.11	Lajes a funcionar predominantemente numa direcção. . . . .	95
3.12	Representação da deformada de uma laje. . . . .	97
3.13	Carga sinusoidal. . . . .	99
3.14	Campo de deslocamentos transversais. . . . .	99
3.15	Campo de rotações. . . . .	99
3.16	Campo de curvaturas de flexão. . . . .	100
3.17	Campo de curvaturas de torção. . . . .	100
3.18	Campo de momentos flectores. . . . .	101
3.19	Campo de momentos torsores. . . . .	101
3.20	Campo de esforços transversos. . . . .	102
3.21	Esforços transversos efectivos nos bordos $x = 0$ e $y = 0$ , respectivamente. . . . .	103
3.22	Laje rectangular simplesmente apoiada. . . . .	106
3.23	Lajes contínuas. . . . .	110

3.24 Laje contínua com dois tramos. . . . .	111
---	-----

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo introdutório à análise de lajes definem-se, brevemente, os principais conceitos envolvidos nesta área bem como as técnicas mais correntes que permitem analisar, do ponto de vista estrutural, uma laje. Cada um dos temas aqui tratados será objecto de um estudo mais detalhado em capítulos seguintes.

### 1.1 Lajes - conceitos básicos

Antes de entrarmos propriamente no estudo das lajes será conveniente recorrermos ao *Vocabulário da Teoria das Estruturas* [7] por forma a explicitarmos de forma clara um conjunto de definições que às lajes (e a outras estruturas laminares) diz respeito:

**Peça laminar** - Corpo em que uma das dimensões é muito menor que as outras duas;

**Folheto médio** - Superfície média de uma peça laminar;

**Plano médio** - Folheto médio de uma peça laminar plana;

**Placa** - Peça laminar plana sujeita a esforços existentes apenas no seu plano médio (ver Fig. 1.1);

**Laje** - Peça laminar plana sujeita principalmente a esforços não existentes no seu plano médio (ver Fig. 1.1);

**Membrana** - Peça laminar não plana sujeita a esforços existentes apenas nos planos tangentes ao seu folheto médio (ver Fig. 1.2);

**Casca** - Peça laminar não plana sujeita a esforços não existentes apenas nos planos tangentes ao seu folheto médio (ver Fig. 1.2);

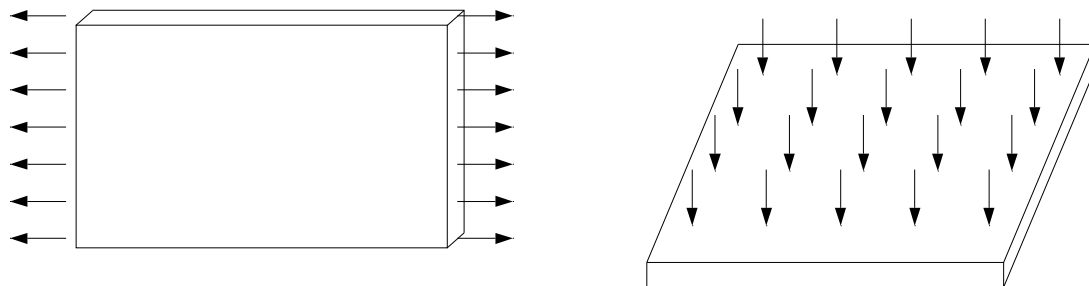


Figura 1.1: Placa e laje - estruturas laminares planas.

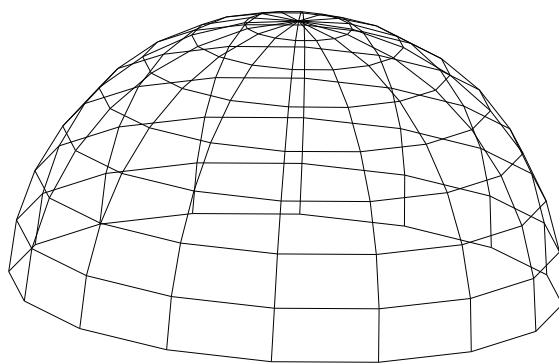


Figura 1.2: Casca/membrana - estruturas laminares não planas.

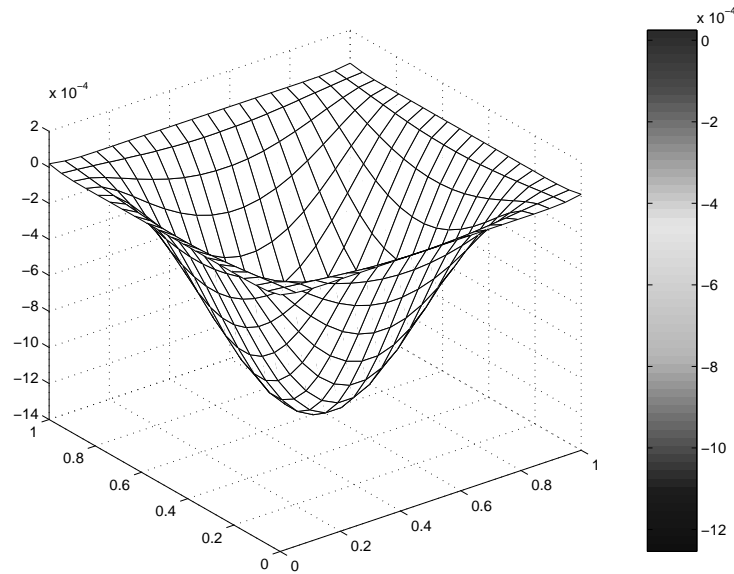


Figura 1.3: Comportamento de laje.

Uma laje é então uma estrutura laminar (porque a espessura é bastante menor que as outras duas dimensões), é plana e está carregada transversalmente ao próprio plano. De notar que caso não existam cargas transversais ao plano a mesma estrutura laminar plana é uma placa e não uma laje. Isto é o que sucede para a maioria dos pavimentos de edifícios em que, para as acções ditas verticais (peso próprio ou sobrecargas correntes em edifícios) o pavimento se comporta como uma laje ao passo que para as acções ditas horizontais (sismo, por exemplo) o mesmo pavimento se comporta como uma placa.

A maior dificuldade na análise deste tipo de estruturas face às estruturas formadas por elementos unidimensionais (treliças, pórticos, grelhas) resulta precisamente do carácter bidimensional que o seu comportamento estrutural exhibe. Isto é particularmente assim para quem, como os alunos do 4º ano da Licenciatura em Engenharia Civil a quem estes Apontamentos se dirigem, teve ainda muito pouco contacto com estruturas não unidimensionais.

Apesar de tanto placas como lajes exibirem comportamento bidimensional é objectivamente mais simples (tanto em termos teóricos como intuitivos) compreender o funcionamento de uma placa do que o de uma laje.

De uma forma muito simplista podemos dizer que ao traccionar uma placa ela irá "crescer" ou "esticar" na direcção das tracções e que, por força do coeficiente de Poisson, irá "encolher" na direcção transversal. Claro que nem sempre o comportamento das placas é assim tão evidente como no caso de tracção pura numa direcção; bastam pequenas variações no tipo de cargas aplicadas, na geometria ou no tipo de apoios para que a intuição se afaste um pouco da realidade.

No caso de lajes algo de semelhante vai ocorrer: flexão numa direcção leva, normalmente,

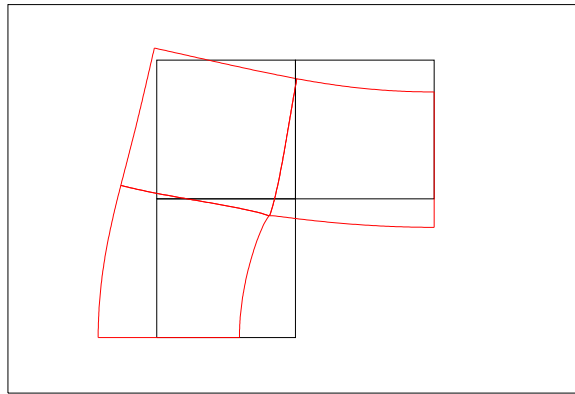


Figura 1.4: Placa traccionada.

a que se desenvolva flexão também na outra direcção. A análise digamos "intuitiva" do comportamento estrutural de lajes é, no entanto, mais difícil de fazer do que no caso das placas já que há mais factores que podem concorrer para "perturbar" aquilo que nós, mais habituados a estruturas com comportamento unidimensionais, poderíamos esperar fosse o comportamento estrutural da laje.

Pode então dizer-se que, nestes Apontamentos, se introduz o estudo de lajes, ou seja, de estruturas laminares planas sujeitas principalmente a esforços não existentes no seu plano médio, não se considerando a existência de esforços (normais e de corte) nesse plano.

## 1.2 Definição do modelo estrutural de análise de lajes

À semelhança do que sucede no caso das estruturas reticuladas, a representação do modelo estrutural de uma laje passa pela simplificação da geometria e, de forma particular, das condições de apoio.

Nas peças lineares apenas o eixo é representado supondo-se sempre que quer as cargas quer as condições de apoio existem ou localizam-se em determinados pontos desse eixo. No caso das lajes representa-se o seu plano médio e admite-se que as condições de apoio têm existência apenas em pontos desse plano e que as cargas são tais que conduzem principalmente a esforços não existentes nesse plano.

As condições de apoio em elementos unidimensionais (peças lineares) têm carácter pontual e ocorrem apenas nas extremidades dos elementos estruturais. Para o caso típico de elementos de pórticos planos (ou seja, vigas e pilares que são os elementos mais familiares para os leitores destes Apontamentos) em que cada extremidade tem até três formas possíveis de se deslocar (graus de liberdade) os seguintes tipos de apoios podem ser definidos:

- ponto (extremidade de elemento estrutural) não apoiado, ou seja, livre;

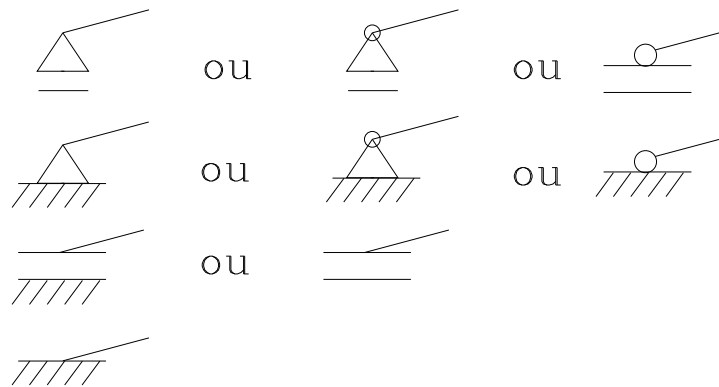


Figura 1.5: Apoios em pórticos planos.

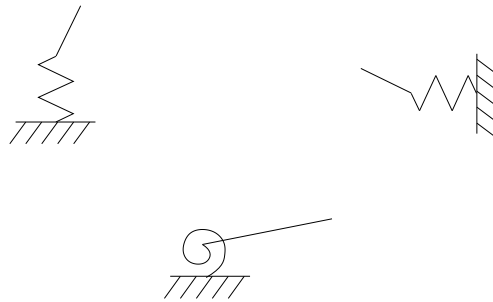


Figura 1.6: Apoios elásticos em pórticos planos.

- ponto que permite a rotação e uma translação, ou seja, apoio simples;
- ponto que permite apenas a rotação, ou seja, apoio fixo;
- ponto que permite apenas uma translação, ou seja, encastramento deslizante;
- ponto que não permite nenhum deslocamento, ou seja, encastrado;

Para além destes casos é ainda possível permitir apenas parcialmente qualquer um daqueles movimentos, ou seja, é possível considerar a existência de molas segundo qualquer das direcções.

Para as lajes, e porque os esforços existem quase exclusivamente fora do plano médio, as formas de qualquer ponto da laje se deslocar são diferentes das de elementos de pórtico plano. Ao invés de duas translações (com existência no plano) e uma rotação (que se define como transversal ao plano, ou seja, que causa curvatura no próprio plano) temos agora apenas uma translação transversal ao plano médio e duas rotações no próprio plano médio (que causam curvaturas apenas "visíveis" fora do plano). (ver figura)



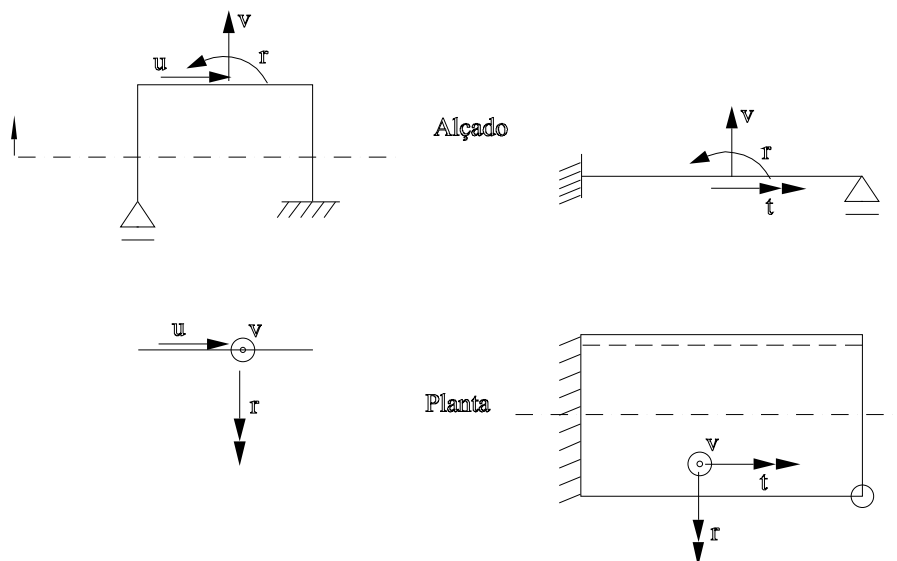


Figura 1.7: Deslocamentos admissíveis em pórticos e em lajes.

A definição dos tipos de apoios possíveis em lajes inclui os apoios que se distribuem segundo todo um bordo e ainda os apoios pontuais. Estes últimos podem, num modelo estrutural, corresponder à existência de pilares, ou seja, à existência de restrição ao deslocamento transversal nesses pontos designando-se, por isso, por apoio pontual (ficamos-nos pela restrição ao deslocamento transversal por não se achar relevante a consideração de restrições às rotações). Quanto às condições de apoio nos bordos poderemos definir os seguintes apoios:

- bordo (aresta da laje) não apoiado, ou seja, bordo livre;
- bordo que permite a rotação paralela ao próprio bordo mas não o deslocamento transversal nem a rotação transversal ao bordo, ou seja, bordo simplesmente apoiado;
- bordo que permite apenas a translação, ou seja, bordo com encastramento deslizante;
- bordo que não permite nenhum movimento, ou seja, bordo encastrado;

Ao contrário do que acontece nos pórticos planos para as translações, não faz muito sentido para lajes (pelo menos numa primeira abordagem) falar-se em bordos que permitam a rotação transversal ao bordo mas não o deslocamento transversal a menos que se pretenda simular um bordo elástico como se verá adiante.

A representação dos tipos de apoios pode ser vista na Figura 1.8

Também para as lajes é possível considerar a existência de molas segundo qualquer uma das direcções.

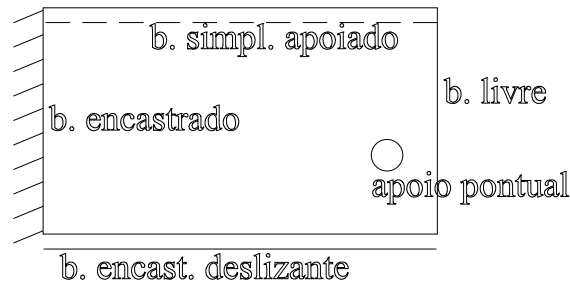


Figura 1.8: Representação de apoios em lajes.

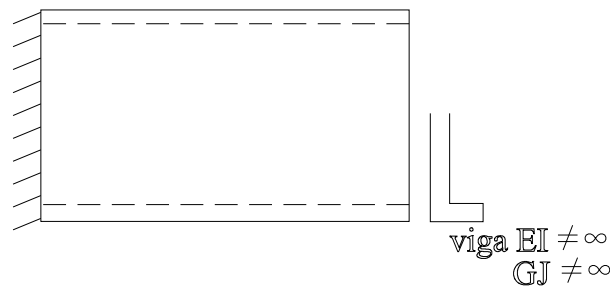


Figura 1.9: Bordos elásticos.

A existência de molas, apesar de não muito usual nas análises correntes, pode ter interesse quando se pretende simular a curvatura do próprio bordo (em flexão ou em torção) ou a deformação axial do pilar. No primeiro destes casos admite-se a existência de uma viga alinhada segundo o bordo a qual apresenta rigidez (de flexão e/ou de torção) com valores diferentes de zero ou de infinito.

Na Figura 1.10, extraída de [6], encontra-se um painel de laje vigada com características corrente e a sua representação esquemática em termos de modelo estrutural. Esta laje apresenta as seguintes condições de apoio:

- bordo livre (entenda-se sem viga de apoio);
- bordo apoiado - apoiado numa viga que se assume não ter rigidez de torção e apresentar rigidez de flexão infinita; é a situação mais usual. Daqui resulta que, nesse bordo, a laje roda livremente em relação ao bordo (ou seja, ao eixo da viga) mas não roda transversalmente à viga nem se desloca transversalmente ao plano da laje.
- bordo encastrado - na realidade estamos na presença de bordos que pertencem simultaneamente a dois painéis, trata-se de um apoio de continuidade. Nesta situação apenas se impede a rotação relativa entre os painéis, não a rotação global da laje sobre o apoio. Apesar disso, e porque simplifica a análise, é usual considerar-se, em termos de modelo estrutural, que o bordo está encastrado.

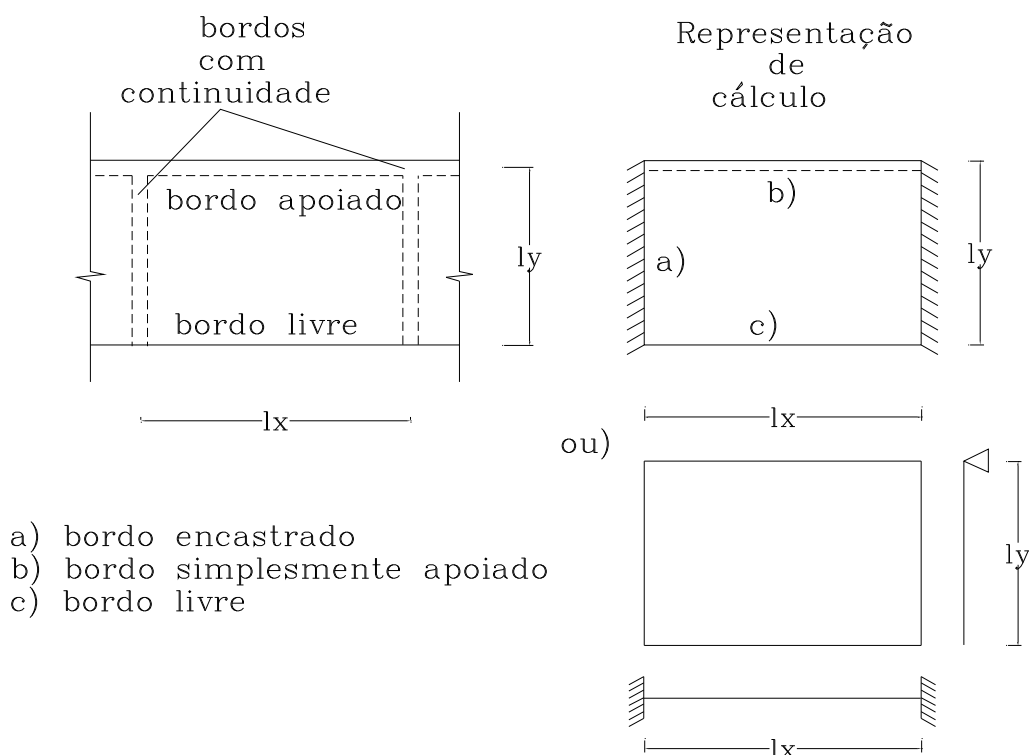


Figura 1.10: Representação esquemática das condições de apoio, [6].

É procedimento habitual na análise estrutural de pavimentos de edifícios (em particular os pavimentos em laje vigada) efectuar a sua decomposição em painéis de laje independentes. Desta forma a análise é simplificada uma vez que quer a geometria quer, sobretudo, as condições de apoio são mais simples de simular. Claro que esta simplificação pode conduzir a diferenças apreciáveis entre os resultados obtidos para cada painel isolado em relação aos obtidos para os painéis adjacentes. Na realidade, para os bordos de continuidade (como os da Figura 1.10) será necessário garantir que os esforços preponderantes (tipicamente o momento associado ao modo de flexão dominante na vizinhança do bordo) tomem valores idênticos de ambos lados do bordo de continuidade. Isso requer um tratamento posterior dos resultados obtidos para cada painel isolado. Este procedimento será visto em pormenor mais adiante.

### 1.3 Classificação das lajes face ao comportamento estrutural

As lajes podem classificar-se sob diversos pontos de vista, nomeadamente quanto ao tipo de apoio, à constituição, ao processo de fabrico, ao modo de flexão dominante, ao comportamento estrutural; ver [6] para mais detalhes.

No que diz respeito à Análise de Estruturas interessa sobretudo o seu comportamento estrutural o qual é, em grande medida, ditado pelos seguintes factores:

- pelos tipos de apoios e de cargas, ou seja, pelas condições de fronteira;
- pela relação entre os vãos, a qual condiciona a direcção de flexão dominante;
- o comportamento mecânico do material de que a laje é constituída;
- a relação da espessura com o menor dos vãos.

O último destes factores, a relação da espessura com o menor vão (no caso de lajes vigadas ou com o maior dos vãos no caso de lajes fungiformes), é da maior importância pois condiciona o tipo de modelo de análise de lajes que se pode utilizar.

Nestes apontamentos será considerada em mais pormenor a teoria elástica linear de lajes finas apesar de ser também feita referência à análise de lajes espessas.

A teoria elástica linear de lajes finas, tendo em conta os pressupostos considerados na sua dedução como se verá a seguir, deve apenas ser aplicada a lajes que verifiquem, segundo Bareš [1], uma relação espessura/menor vão inferior a aproximadamente  $1/5$ <sup>1</sup> e ainda que os deslocamentos transversais máximos sejam inferiores a aproximadamente  $1/5$  da espessura. Esta última restrição pode, ainda mais do que a da relação da espessura com o vão, ser condicionante.

Em qualquer dos casos deve ser salientado que são raras as lajes de estruturas correntes (ou mesmo especiais) que não verificam estas condições podendo pois a sua análise ser feita com base na teoria de lajes finas. Como veremos adiante não há, porém, nenhum impedimento à utilização da teoria de lajes espessas para a análise de lajes finas.

## 1.4 Breve resenha de métodos de análise de lajes

Quando a geometria e as condições de fronteira da laje são simples, é possível encontrar soluções analíticas normalmente sob a forma de séries infinitas.

Muitas dessas soluções estão tabeladas, em particular para os casos correntes de lajes, [1]. Este é, sem dúvida, o processo mais utilizado pelos projectistas no dimensionamento de painéis de laje que não apresentem dificuldades de maior.

Nos casos mais gerais (nos quais se incluem quase todos os casos em que se pretende analisar dois ou mais painéis de laje simultaneamente) não é possível encontrar soluções analíticas (nem mesmo na forma de série) e tem que se recorrer a técnicas numéricas.

---

<sup>1</sup>Outros autores são um pouco mais conservadores e recomendam relações espessura/menor vão inferiores a aproximadamente  $1/10$ .

As técnicas numéricas mais utilizadas para a análise de lajes baseiam-se nos seguintes métodos:

- o método dos elementos finitos, [5];
- o método dos elementos de fronteira, [2];
- o método das diferenças finitas, [3].

A modelação de lajes através de elementos de grelha é outra técnica correntemente utilizada para a análise de lajes com geometria e/ou condições de fronteira mais complexas e quando não se dispõe de um programa de elementos finitos de laje ou não se justifica a sua utilização.

A modelação através de elementos de grelha corresponde, na realidade, à definição do *caminho* ou *trajectória* que as cargas tomam até descarregarem nos apoios.

Pode provar-se, com recurso à análise plástica limite, nomeadamente ao teorema estático, que as distribuições de esforços assim determinadas estão sempre do lado da segurança o que é muito importante em termos de dimensionamento de lajes. É usual referir-se este método como sendo o método das faixas ou das bandas.

Por último deve referir-se ainda um outro método baseado no teorema cinemático da análise plástica limite, o método das linhas de rotura. Este método é, talvez, o menos utilizado por fornecer uma solução que sobrestima a capacidade resistente da laje não estando, portanto, do lado da segurança.

Todos estes métodos (à excepção do método dos elementos de fronteira por ser o menos utilizado) serão objecto de atenção em próximas secções destes Apontamentos.

## Capítulo 2

# Lajes de Kirchhoff - Formulação do problema

Neste capítulo são apresentadas as grandezas - *deslocamentos, deformações e esforços* - em função das quais se descreve o comportamento dos elementos de laje.

Num sólido elástico tridimensional, esta descrição é efectuada com base na utilização da Teoria da Elasticidade, determinando o vector dos deslocamentos e as componentes dos tensores das deformações e das tensões. Esta metodologia não só é bastante pesada de um ponto de vista matemático, como os resultados que permite obter são de difícil tratamento por parte dos projectistas que pretendam dimensionar a estrutura analisada.

Desta forma, há toda a conveniência em tirar partido do facto das lajes serem estruturas laminares planas. Tendo em conta as particularidades do comportamento deste tipo de elementos estruturais, que advêm do facto da espessura ter uma dimensão muito menor que o menor dos vãos da laje, é possível exprimir o comportamento da laje em função de grandezas definidas apenas sobre o seu plano médio.

Assim, surgem os deslocamentos no plano médio, as curvaturas (que substituem o tensor das deformações) e os campos de esforços (que substituem o tensor das tensões). Para que se possam definir estas grandezas, é necessário admitir como válidas algumas hipóteses sobre o comportamento destes elementos estruturais.

Estas hipóteses simplificativas são apresentadas e discutidas na primeira secção deste capítulo. Depois são apresentadas com detalhe todas as grandezas cinemáticas e estáticas que intervêm na caracterização do comportamento dos elementos de laje.

As equações que permitem relacionar essas grandezas, as condições de *compatibilidade, equilíbrio e elasticidade* são apresentadas de seguida. Conjugando estas três condições obtém-se a equação diferencial que rege o comportamento da laje, a *Equação de Lagrange*. Em simultâneo, são discutidos os tipos de apoio que podem existir e as correspondentes condições de fronteira que as grandezas devem satisfazer ao longo de cada um dos bordos

da laje.

Uma vez apresentadas todas as grandezas e as equações fundamentais do problema, discutem-se as diferenças entre soluções exactas, soluções compatíveis e soluções equilibradas. Tal como se verá no capítulo dedicado à Análise Plástica Limite de Lajes, a obtenção de soluções equilibradas é bastante importante, uma vez que a informação resultante está do lado da segurança. Os conceitos associados à determinação de soluções compatíveis serão recuperados quando se discutir a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de Lajes.

Este capítulo termina com a apresentação de alguns exemplos de aplicação e um conjunto de problemas propostos.

## 2.1 Lajes de Kirchhoff - Hipóteses simplificativas

Apresentam-se neste capítulo as hipóteses simplificativas que conduzem à obtenção da teoria de lajes finas. Algumas dessas hipóteses são gerais, semelhantes às que são admitidas para outros tipos de elementos estruturais. Há também hipóteses específicas, que se relacionam directamente com a especificidade do comportamento das lajes e que serão apresentadas e discutidas de forma mais detalhada.

Como hipóteses gerais, assume-se:

- Linearidade física
- Linearidade geométrica
- Homogeneidade e isotropia do material estrutural

A hipótese da linearidade física corresponde a assumir para o material um comportamento elástico linear. Este facto simplifica as relações constitutivas, permitindo o estabelecimento de uma relação linear entre esforços e deformações.

A linearidade geométrica inclui a hipótese dos pequenos deslocamentos e das pequenas deformações. É a hipótese que permite que as condições de equilíbrio possam ser estabelecidas com base na configuração indeformada da estrutura.

Quando se formula uma teoria para elementos de laje, é usual admitir que:

- Fibras rectas inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem rectas após a deformação do elemento estrutural;
- As fibras rectas normais ao plano médio da laje são inextensíveis.

Esta última hipótese corresponde a assumir que se despreza a extensão axial segundo a direcção normal ao plano médio da laje ( $\varepsilon_{zz}$ ). Desta forma, todos os pontos pertencentes a uma dada fibra vão apresentar o mesmo deslocamento transversal.

As hipóteses acima referidas são comuns às teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. Há portanto uma hipótese adicional que a teoria de Kirchhoff adopta e que está intimamente associada ao facto de se desprezar a deformação por esforço transversal. Esta hipótese pode ser enunciada da seguinte forma:

- As fibras rectas inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje, permanecem rectas após a deformação e perpendiculares ao plano médio.

Esta hipótese encontra-se ilustrada na figura 2.1.

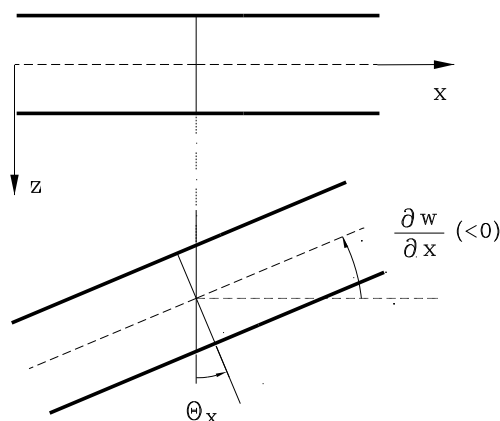


Figura 2.1: Ilustração das hipóteses de Kirchhoff

Para terminar, convém referir que nada é dito sobre as tensões normais segundo a direcção  $z$ ,  $\sigma_{zz}$ . Uma vez que se consideram como nulas as extensões segundo essa direcção, a lei de Hooke permite concluir que aquela componente do tensor das tensões não se poderá anular. No entanto, é razoável admitir-se que os seus valores sejam pouco significativos quando comparados com as restantes componentes desse tensor.

Para simplificar a apresentação, considera-se que não existe qualquer componente do carregamento que actue no plano  $(xy)$ . Como resultado desta restrição, os pontos que se situam sobre o plano médio da laje apenas podem apresentar deslocamentos transversais, ou seja translações com a direcção do eixo normal àquele plano.



## 2.2 Definição das grandezas estáticas e cinemáticas

### 2.2.1 Definição do campo de deslocamentos

A tarefa que se coloca neste instante consiste na determinação de um conjunto de grandezas, definidas apenas sobre o plano médio da laje, que permitam caracterizar de forma única o deslocamento de todos os pontos pertencentes ao sólido tridimensional em análise. Seja dado um ponto  $\mathbf{P}$  da laje, de coordenadas  $(x, y, z)$ . É necessário definir um conjunto de grandezas tal que seja possível obter a posição final desse mesmo ponto depois da estrutura se deformar.

Desta forma, as grandezas que procuramos devem permitir obter as componentes independentes do vector dos deslocamentos,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  e  $u_z(x, y, z)$ .

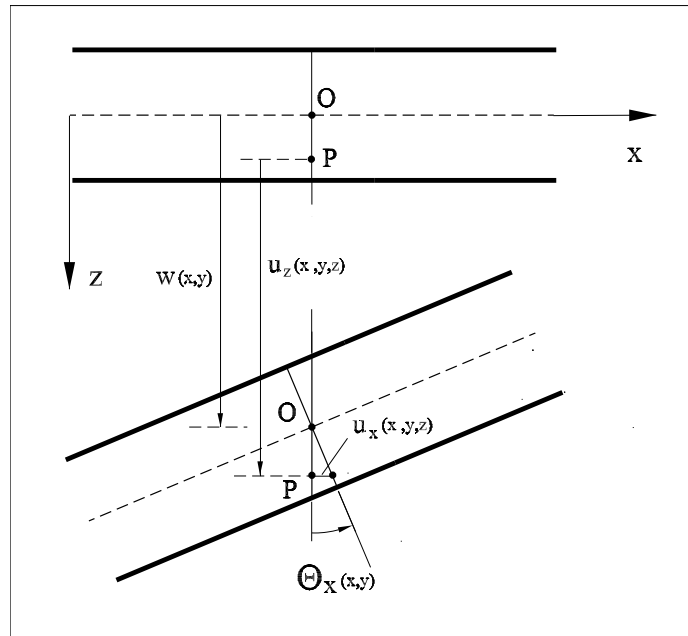


Figura 2.2: Determinação do campo de deslocamentos

Considere-se agora a deformada representada na figura 2.2. Trata-se de um corte efectuado num troço infinitesimal do elemento de laje. Este corte representa o que se passa no plano  $(x, z)$ . Os pontos  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{P}$  estão contidos na mesma fibra perpendicular ao plano médio da laje. O ponto  $\mathbf{O}$  pertence a esse plano, pelo que não possui qualquer translacção segundo a direcção  $x$ . Tendo em conta as hipóteses de Kirchhoff apresentadas na secção anterior, é possível escrever:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y) \quad (2.1)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.2)$$

A equação 2.2 tem um significado físico imediato. Permite afirmar que todos os pontos

pertencentes à mesma fibra vertical possuem o mesmo deslocamento transversal. Desta forma, se se quiser determinar a translação segundo a direcção  $z$  de um ponto qualquer do elemento de laje com coordenadas  $(x, y, z)$ , basta apenas conhecer qual o deslocamento transversal do ponto correspondente situado sobre o plano médio da laje, o qual tem por coordenadas  $(x, y)$ .

A equação 2.1 permite caracterizar os deslocamentos segundo  $x$  em função de  $\theta_x(x, y)$ , que corresponde à rotação que a fibra com coordenadas  $(x, y)$  apresenta no plano  $(x, z)$ , tal como se encontra representado na figura 2.2.

Considera-se como positivo para a rotação o sentido indicado nessa figura, pois pretende-se que pontos com coordenada  $z$  positiva apresentem deslocamentos positivos segundo  $x$ .

É fácil adaptar o conteúdo da figura 2.2 para ter em conta o que se passa no plano  $(y, z)$ . Um raciocínio em tudo análogo ao que foi apresentado permite escrever:

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y) \quad (2.3)$$

As equações anteriores permitem verificar que o campo de deslocamentos de um ponto qualquer pertencente ao elemento de laje pode ser definido de forma única se se conhecerem as três grandezas  $w(x, y)$ ,  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ , definidas sobre o plano médio da laje,  $(x, y)$ . Estes deslocamentos generalizados encontram-se representados na figura 2.3. É importante salientar que na convenção utilizada, a rotação  $\theta_x$  não corresponde à rotação em torno do eixo  $x$ . Trata-se isso sim da rotação definida no plano  $(x, z)$ , ou, se se preferir, de uma rotação em torno do eixo  $y$ . O mesmo comentário se pode aplicar em relação à rotação  $\theta_y$ .

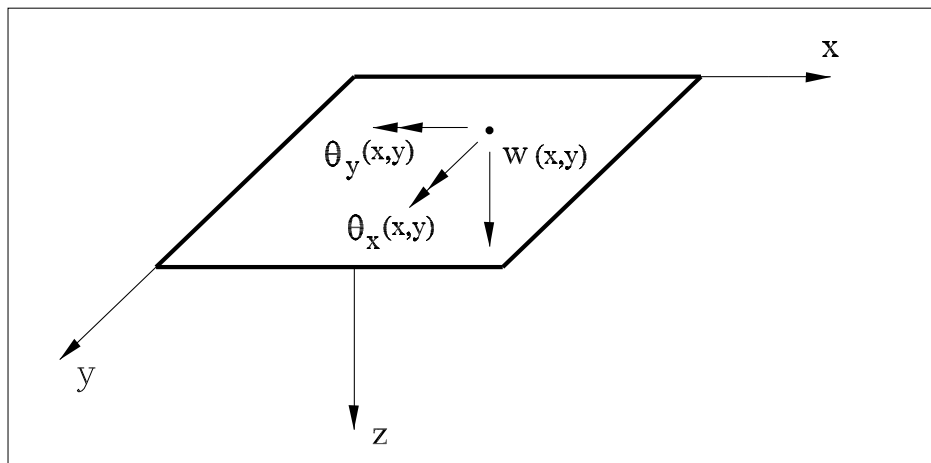


Figura 2.3: Campos de deslocamentos numa laje de Kirchhoff

Serão estas três grandezas independentes? Ou será que, à semelhança do que acontece

nos elementos de viga existe alguma relação entre os campos de rotações e o campo de deslocamentos transversais?

A resposta a esta pergunta é imediata se se tiver em consideração que no caso das lajes de Kirchhoff se despreza a deformação por esforço transversal. Desta forma impõe-se que as componentes  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  do tensor das deformações se deverão anular.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad (2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Quando se despreza a deformabilidade por corte, as expressões anteriores permitem obter de imediato:

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (2.7)$$

Verifica-se então que os campos  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  não são independentes do campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Este é por consequência o único campo de deslocamentos a determinar para se poder caracterizar de forma completa os campos de deslocamentos numa laje fina.

A relação entre o campo de rotações  $\theta_x$  e o campo de deslocamentos transversais  $w$  também pode ser obtida utilizando-se um raciocínio mais intuitivo. Para tal, considere-se de novo a figura 2.1. Geometricamente, é possível verificar que o valor absoluto da rotação  $\theta_x$  é igual ao valor da derivada do campo de deslocamentos transversais,  $\partial w / \partial x$ . Esta igualdade decorre directamente do facto de se ter considerado que as fibras permanecem perpendiculares ao plano médio, mesmo após a deformação do elemento estrutural. Observando de novo a figura em análise, verifica-se que a rotação é positiva (de acordo com a convenção adoptada), mas o valor dos deslocamentos transversais está a diminuir, pelo que a sua derivada assume valores negativos. Este facto justifica o sinal negativo que existe nas definições 2.6 e 2.7.

## 2.2.2 Definição do campo de deformações

O campo de deformações generalizadas é obtido quando se substitui o tensor das deformações por grandezas definidas sobre o plano médio da laje. As hipóteses admitidas implicam que as deformações de corte,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , e as extensões segundo a espessura,  $\varepsilon_{zz}$ , se anulam. As restantes deformações podem ser determinadas a partir das condições de compatibilidade da elasticidade tridimensional:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

Tendo em conta as definições (2.1) e (2.3), as extensões axiais podem ser escritas na forma:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = z \times \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = z \times \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \quad (2.12)$$

Desta forma, é possível determinar as extensões axiais em todos os pontos da laje em função apenas da taxa de variação dos campos de rotações e da distância da fibra ao plano médio da laje.

O significado físico da equação (2.11) é claro. Indica que as fibras dispostas segundo a direcção  $x$  sofrem uma extensão axial que é directamente proporcional à sua distância ao plano médio da laje. Tal como seria de esperar, as fibras situadas sobre esse plano ( $z = 0$ ) não sofrem qualquer deformação.

A constante de proporcionalidade referida acima é o parâmetro que se utiliza para caracterizar o estado de deformação axial dessas fibras e costuma designar-se por curvatura de flexão ao longo de  $x$ ,  $\chi_{xx}(x, y)$ . A substituição de (2.6) em (2.11) permite obter

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

A definição (2.11) permite concluir que para que haja deformação axial das fibras dispostas segundo  $x$  é necessário que o campo de rotações  $\theta_x(x, y)$  varie ao longo de  $x$ . Caso contrário, ou seja, quando o campo de deslocamentos transversais ao longo de  $x$  for constante ou variar linearmente, a curvatura de flexão  $\chi_{xx}$  é nula. Neste caso, a laje apresenta ao longo desta direcção apenas um deslocamento de corpo rígido, tal como se encontra ilustrado na figura 2.4.

Para caracterizar a extensão axial das fibras dispostas segundo  $y$ , surge a necessidade de se definir uma outra curvatura de flexão. A substituição de (2.7) na igualdade (2.12) conduz de imediato a:

$$\chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (2.14)$$

O significado físico desta nova grandeza é idêntico ao que foi discutido para a curvatura de flexão ao longo de  $x$ .

Se se pretender obter um campo de deslocamentos transversais que apresente um campo de curvaturas  $\chi_{xx}(x, y) = 1.0$  e  $\chi_{yy}(x, y) = 0.0$ , qual é a resposta mais simples? Tendo em conta as definições (2.13) e (2.14), não é complicado concluir que uma resposta possível será:

$$w(x, y) = -\frac{1}{2} x^2$$

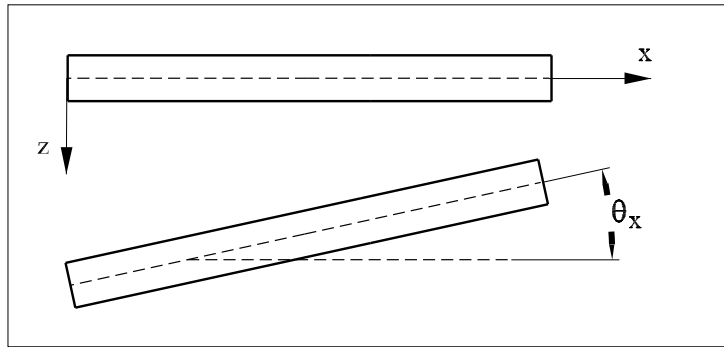


Figura 2.4: Deslocamento de corpo rígido

Este campo de deslocamentos encontra-se representado na figura 2.5.

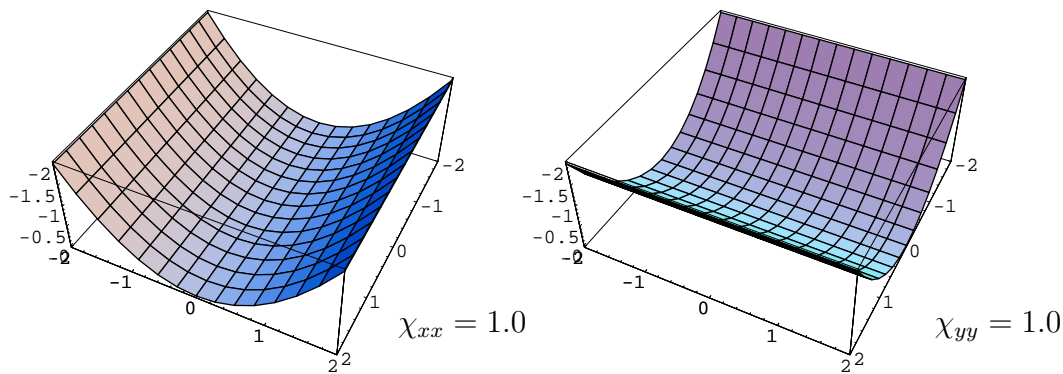


Figura 2.5: Campos de deslocamentos com curvaturas de flexão unitárias

Na figura 2.5 encontra-se também representado o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = -\frac{1}{2} y^2$$

ao qual está associado o campo de curvaturas  $\chi_{xx}(x, y) = 0.0$  e  $\chi_{yy}(x, y) = 1.0$ .

Para caracterizar de forma completa a deformação por flexão do elemento de laje são então necessárias duas grandezas definidas sobre o plano médio da laje. São essas grandezas as curvaturas de flexão de segundo  $x$  e  $y$ ,  $\chi_{xx}(x, y)$  e  $\chi_{yy}(x, y)$ , respectivamente.

Será que estas grandezas são suficientes para caracterizar de forma completa todos os estados de deformação possíveis em elementos de laje? A resposta negativa aparece por intuição, uma vez que as deformações generalizadas até aqui apresentadas apenas permitem caracterizar as deformações por flexão, não conseguindo caracterizar as deformações quando a laje apresenta torção.

Um raciocínio um pouco mais rigoroso também permite chegar à mesma conclusão. Da tarefa inicialmente enunciada, ainda falta verificar qual a grandeza que nos vai permitir substituir as distorções no plano da laje,  $\varepsilon_{xy}(x, y, z)$ . Substituindo na equação (2.10) as equações (2.6) e (2.7), obtém-se de imediato

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \times z \times \left( \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

Surge desta forma a definição de curvatura de torção,  $\chi_{xy}(x, y)$ ,

$$\chi_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

Esta equação permite verificar que existe deformação por torção num determinado ponto da laje sempre que a rotação  $\theta_x$  varie ao longo de  $y$  e a rotação  $\theta_y$  varie ao longo de  $x$ .

A curvatura de torção pode também ser expressa em função do campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Basta para tal substituir na equação anterior as definições (2.6) e (2.7). Obtém-se

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

A figura 2.6 mostra a deformada de uma laje caracterizada pela existência de uma curvatura de torção unitária e na qual ambas as curvaturas de flexão se anulam. A equação do campo de deslocamentos transversais nessa deformada é dada por:

$$w(x, y) = -x y$$

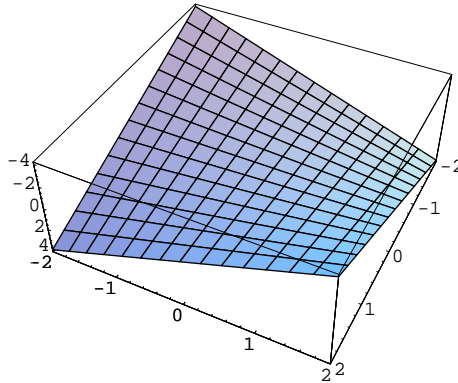


Figura 2.6: Campo de deslocamentos com curvatura de torção unitária

Por fim, convém salientar que as três curvaturas definidas neste capítulo correspondem às três componentes independentes de um tensor simétrico de segunda ordem, que se pode designar por tensor das curvaturas. Desta forma, as leis de transformação tensorial devem ser aplicadas sempre que se pretender caracterizar o estado de deformação numa laje referido a um outro sistema de eixos  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

### 2.2.3 Definição do campo de esforços

Falta agora definir quais os esforços que se torna necessário conhecer para que se consiga caracterizar o estado de tensão existente numa laje de Kirchhoff.

Tendo em atenção os campos de deformações generalizadas - curvaturas - definidos na secção anterior, é possível intuir que se deverão definir dois campos independentes de momentos flectores e um campo de momentos torsores. A existência de momentos flectores faz prever ainda a necessidade de se definirem dois campos de esforços transversos.

Este raciocínio intuitivo pode ser confirmado se se utilizar um processo de definição mais rigoroso, que nos permita representar, num ponto qualquer do elemento de laje, as componentes independentes do tensor das tensões em função de um conjunto de grandezas definidas apenas sobre o plano médio.

Para se obter a definição rigorosa dos diferentes campos de esforços envolvidos na análise da laje, considere-se o bordo com normal exterior com a direcção do eixo  $x$ .

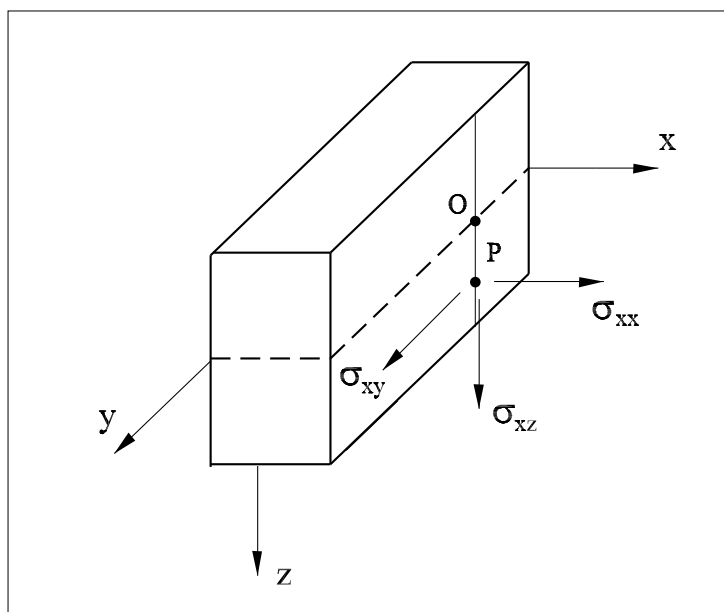


Figura 2.7: Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo  $x$

Tal como se encontra representado na figura 2.7, os pontos  $O$  e  $P$  pertencem a uma mesma fibra normal ao plano médio da laje. As componentes independentes do tensor das tensões no ponto  $P$  também se encontram representadas na mesma figura. É o cálculo de resultantes dessas distribuições de tensões que conduz à determinação de alguns dos esforços intervenientes na caracterização do estado de tensão no elemento de laje.

A integração na espessura da componente  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  dá origem ao esforço transversal

$v_x(x, y)$ . Define-se:

$$v_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x, y, z) dz \quad (2.18)$$

O momento flector  $m_{xx}(x, y)$  e o momento torsor  $m_{xy}(x, y)$  correspondem à resultante dos momentos (em relação ao ponto  $O$ ) provocados pelas componentes  $\sigma_{xx}(x, y, z)$  e  $\sigma_{xy}(x, y, z)$ . Pode então escrever-se:

$$m_{xx}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz \quad (2.19)$$

$$m_{xy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy}(x, y, z) dz \quad (2.20)$$

Qual o sentido que se deve considerar como positivo para os esforços definidos nas equações (2.18), (2.19) e (2.20)? A resposta tem em conta o sentido positivo do tensor das tensões. Assim, o esforço transverso positivo resultará da integração de tensões  $\sigma_{xz}$  positivas. Os momentos (flector e torsor) serão positivos quando causados por componentes positivas do tensor das tensões ( $\sigma_{xx}(x, y, z)$  e  $\sigma_{xy}(x, y, z)$ ) actuando em pontos da laje com coordenadas  $z$  positivas. Desta forma, os sentidos positivos para os esforços que actuam neste bordo da laje são os que se encontram representados na figura 2.8. Em bordos nos quais a normal exterior aponta no sentido negativo do eixo  $x$ , os esforços positivos  $m_{xx}(x, y)$ ,  $m_{xy}(x, y)$  e  $v_x(x, y)$  têm o sinal contrário, tal como se encontra indicado na mesma figura.

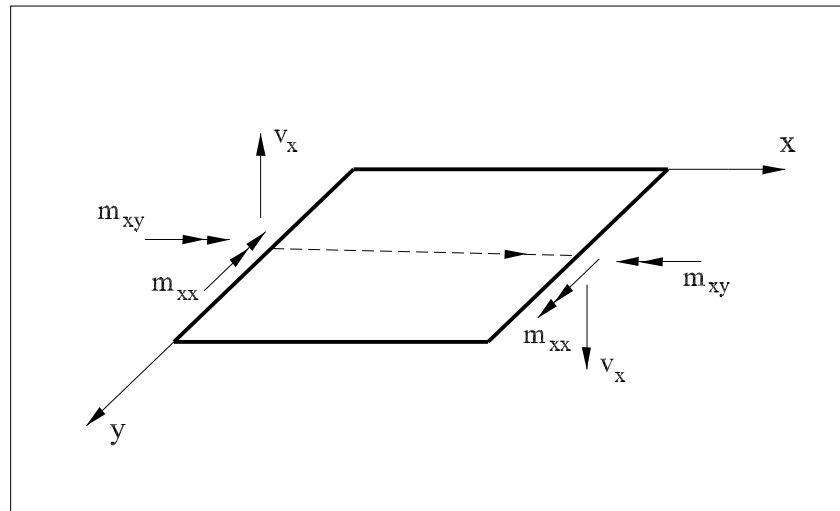


Figura 2.8: Esforços  $m_{xx}, m_{xy}$  e  $v_x$  positivos

É importante salientar desde já que o momento flector  $m_{xx}(x, y)$  não é um momento em torno do eixo  $x$ . Trata-se na realidade do momento flector associado à deformação por flexão no plano  $(x, z)$ . De um ponto de vista de comportamento físico, pode considerar-se que se trata do momento flector que surge se se considerar o comportamento à flexão de



um conjunto de vigas com o eixo paralelo a  $x$ . Pode ainda considerar-se que o momento  $m_{xx}(x, y)$  é o que condiciona directamente o dimensionamento das armaduras longitudinais com a direcção  $x$  em lajes de betão armado.

De um ponto de vista um pouco mais formal, os índices nos campos de momentos  $m_{xx}$  e  $m_{xy}$  indicam directamente quais as componentes do tensor das tensões ( $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xy}$ ) que se consideraram na sua definição.

Outro aspecto importante na definição dos campos de esforços nas lajes está também presente nas definições (2.18), (2.19) e (2.20). Ao contrário do que se acontece no caso da teoria das peças lineares, a integração envolvida na definição dos diferentes campos de esforços é efectuada apenas ao longo da espessura. Como consequência, os esforços transversos têm a dimensão física de força por unidade de comprimento, ( $F L^{-1}$ ), e os momentos flectores e torsor têm a dimensão física de momento por unidade de comprimento, ( $F L L^{-1}$ ).

Para se definirem os campos de esforços que ainda estão em falta (da intuição inicial falta surgir ainda um momento flector e um esforço transverso), considere-se agora um bordo da laje com a normal exterior segundo o eixo  $y$ . Na figura 2.9 estão representadas as componentes do tensor das tensões que actuam num ponto  $Q$  existente numa fibra recta perpendicular ao plano médio da laje. Seguindo um raciocínio em tudo análogo

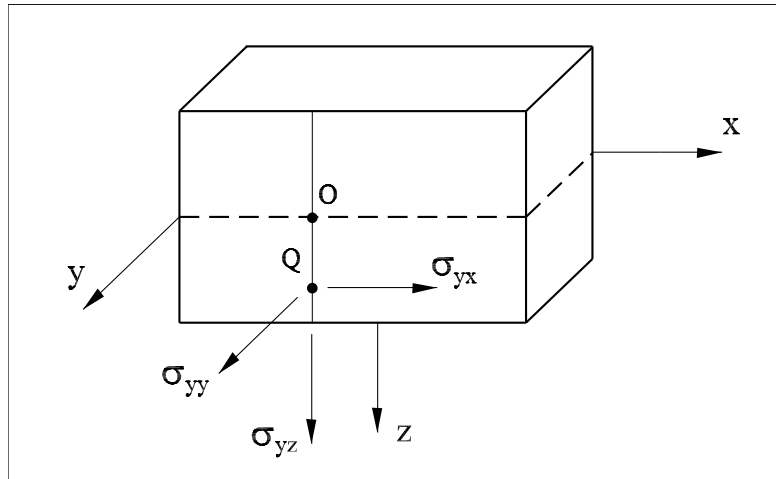


Figura 2.9: Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo  $y$

ao considerado atrás, o esforço transverso  $v_y(x, y)$  é definido como sendo a resultante, ao longo da espessura da laje, da distribuição de tensões tangenciais,  $\sigma_{yz}(x, y, z)$ . Escreve-se desta forma:

$$v_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}(x, y, z) dz \quad (2.21)$$

O esforço transverso  $v_y(x, y)$  positivo nesse bordo terá o sentido indicado na figura 2.10. O momento flector  $m_{yy}(x, y)$  e o momento torsor  $m_{yx}(x, y) = m_{xy}(x, y)$  são definidos por:

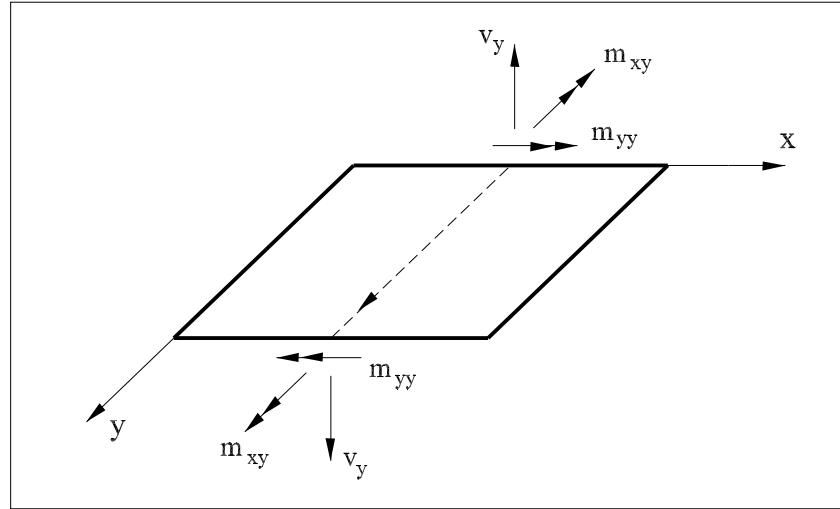


Figura 2.10: Esforços  $m_{yy}, m_{xy}$  e  $v_y$  positivos

$$m_{yy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy}(x, y, z) dz \quad (2.22)$$

$$m_{yx}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yx}(x, y, z) dz \quad (2.23)$$

O sentido positivo desses momentos encontra-se representado na figura 2.10. De novo, considera-se que tensões  $\sigma_{yy}(x, y, z)$  e  $\sigma_{xy}(x, y, z)$  positivas, actuando em pontos com coordenada  $z$  positiva têm que originar momentos positivos. Nos bordos da laje com normal exterior paralela a  $y$  mas com sentido negativo, os esforços serão positivos se tiverem o sentido indicado na figura 2.10.

De novo, são válidos os comentários efectuados acima quanto ao significado físico destas duas grandezas e quanto à sua dimensão física.

Na figura 2.11 representam-se finalmente todos os esforços que intervêm na caracterização do comportamento de uma laje de Kirchhoff.

Repare-se que se pode considerar, de uma forma muito simplificada, que o comportamento da laje pode ser representado pela consideração de um conjunto de barras com eixo paralelo a  $x$  e por um outro conjunto de barras com eixo paralelo a  $y$ . Os esforços  $m_{xx}$ ,  $v_x$  e  $m_{xy}$  são aqueles que se relacionam directamente com o comportamento das primeiras, enquanto que  $m_{yy}$ ,  $v_y$  e  $m_{xy}$  são os esforços necessários à caracterização do segundo conjunto de elementos de viga.

Esta interpretação é bastante simplista. No entanto, será utilizada em capítulos subsequentes, muito em especial quando se discutir a modelação de lajes com elementos de grelha.

Por fim, convém salientar que os campos de momentos flectores e de momentos torso-

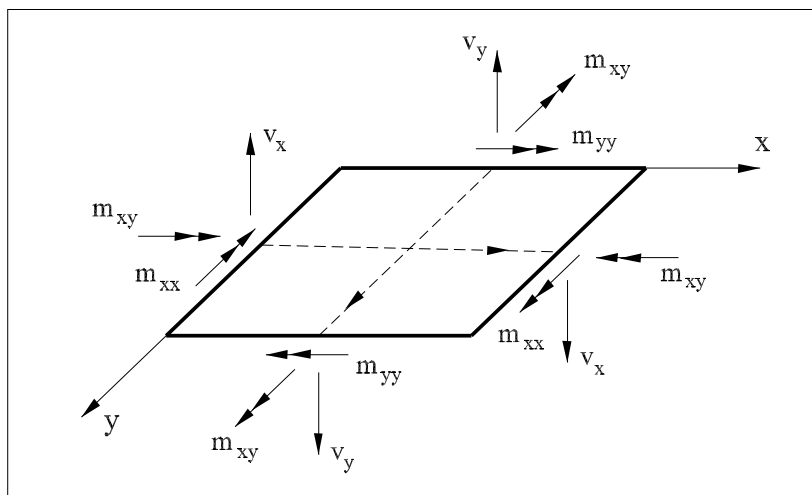


Figura 2.11: Campos de esforços numa laje de Kirchhoff

res constituem um tensor simétrico de segunda ordem. Como tal, quando se tratam as grandezas  $m_{\alpha\beta}$ , devem utilizar-se todas as regras utilizadas no tratamento de entidades tensoriais. Nomeadamente, quando há a necessidade de se efectuar uma mudança de coordenadas, é sempre necessário ter em conta a lei de transformação tensorial, que pode ser escrita no formato:

$$\begin{bmatrix} m_{x't'} & m_{x't} \\ m_{x't} & m_{y't'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{xy} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre os dois referenciais (ver figura 2.12) e  $m_{x't'}$ ,  $m_{y't'}$  e  $m_{x't}$  correspondem aos campos de momentos flectores e torsões expressos no novo sistema de eixos  $(x', y')$ .

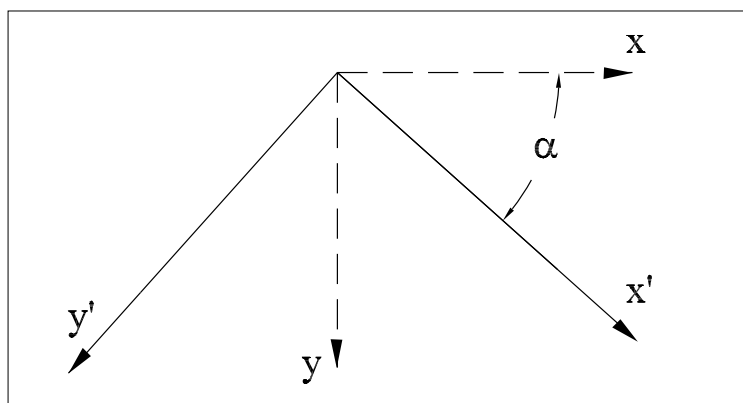


Figura 2.12: Definição da mudança de coordenadas

Quem tiver em conta que a definição de esforços tem por finalidade substituir a utilização

do tensor das tensões na análise de lajes, facilmente verificará que em nenhuma das definições apresentadas nesta secção surgiu a componente  $\sigma_{zz}(x, y, z)$ . Importa salientar que essa componente do tensor das tensões não é nula. Aliás, a lei de Hooke tridimensional permite assegurar que nunca se podem anular em simultâneo as tensões  $\sigma_{zz}(x, y, z)$  e as extensões axiais  $\varepsilon_{zz}(x, y, z)$ .

No desenvolvimento da teoria de Kirchhoff é no entanto normal admitir-se que o valor de  $\sigma_{zz}$  é substancialmente inferior aos das restantes componentes do tensor das tensões e por tal motivo pode ser desprezada. Está fora do âmbito deste texto detalhar este aspecto, mas pode demonstrar-se [9] que no desenvolvimento da teoria de Kirchhoff basta garantir que:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{zz}(x, y, z) dz = 0$$

#### 2.2.4 Recuperação das grandezas tridimensionais\*

Uma vez conhecidas as grandezas generalizadas definidas nas secções anteriores, é possível efectuar o trajecto inverso e calcular-se o valor das grandezas tridimensionais habituais na teoria da elasticidade. No entanto, este raciocínio não é regnal geral aplicado, uma vez que para o dimensionamento corrente dos elementos de laje a informação relevante está contida nas grandezas definidas sobre o plano médio.

A relação entre as componentes do vector dos deslocamentos,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  e  $u_z(x, y, z)$ , e os campos de deslocamentos generalizados  $w(x, y)$ ,  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ , está descrita pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3). Se forem conhecidos estes três campos em todos os pontos do plano médio da laje, é então possível recuperar:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y)$$

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

Todas as componentes do tensor das deformações podem ser expressas em função dos campos de curvaturas  $\chi_{xx}(x, y)$ ,  $\chi_{yy}(x, y)$  e  $\chi_{xy}(x, y)$ . É assumido à partida que as componentes  $\varepsilon_{xz}(x, y, z)$  e  $\varepsilon_{yz}(x, y, z)$  são nulas, uma vez que se despreza a deformação por corte. Também a hipótese da inextensibilidade axial das fibras rectas paralelas ao eixo  $z$  implica que a componente  $\varepsilon_{zz}(x, y, z)$  se anule.

As restantes componentes do tensor das deformações podem ser obtidas tendo em conta as definições (2.11), (2.12) e (2.16):

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = z \times \chi_{xx}(x, y) \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = z \times \chi_{yy}(x, y) \tag{2.26}$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = z \times \chi_{xy}(x, y) \tag{2.27}$$

Até aqui não surgiram quaisquer novidades, tendo sido apenas necessário recuperar informação já anteriormente apresentada e discutida.

O mesmo já não se passa quando se pretende obter o valor das componentes do tensor das tensões a partir do conhecimento do valor dos campos de esforços. Na secção anterior apenas se definiram os esforços como resultantes (ou momentos resultantes) de distribuições de tensões ao longo da espessura da laje. Neste instante, o problema é o inverso, ou seja, é preciso determinar a distribuição de tensões na espessura da laje a partir do conhecimento do valor dessas resultantes.

O primeiro aspecto a ter em conta na resolução deste problema relaciona-se com o facto das hipóteses de Kirchhoff conduzirem a uma distribuição de deformações  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$  que variam linearmente ao longo da espessura, tal como se encontra patente nas equações (2.25), (2.26) e (2.27).

Ao desprezarem-se as tensões  $\sigma_{zz}$ , a lei de Hooke permite escrever:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xy}\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades (2.25), (2.26) e (2.27) nas expressões anteriores vem:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z) &= z \left[ \frac{E}{1 - \nu^2} \chi_{xx} + \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \chi_{yy} \right] \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= z \left[ \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \chi_{xx} + \frac{E}{1 - \nu^2} \chi_{yy} \right] \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= z \frac{E}{1 + \nu} \chi_{xy}\end{aligned}$$

Daqui resulta que também as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  apresentam uma variação linear ao longo da espessura, anulando-se em pontos pertencentes ao plano médio. Na figura 2.13 encontram-se representadas as distribuições de tensões normais,  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , e de tensões tangenciais,  $\sigma_{xy}$ , que resultam directamente das hipóteses de Kirchhoff.

Considere-se a distribuição do campo de tensões  $\sigma_{xx}(x, y, z)$ . A definição (2.19) permite obter:

$$m_{xx}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz = \frac{h^2}{6} \sigma_{xx}^{max}$$

Desta forma, poder-se-à escrever:

$$|\sigma_{xx}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_{xx}|$$

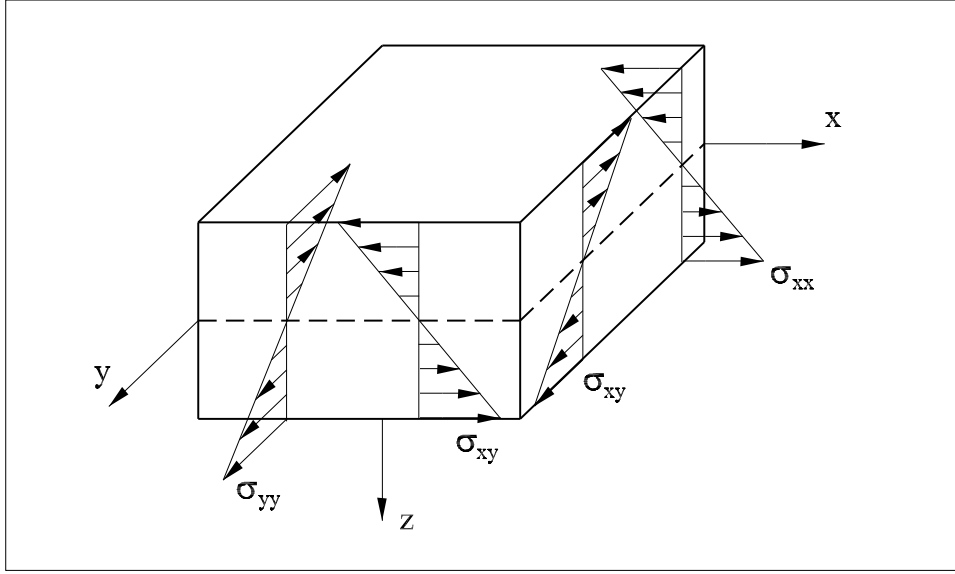


Figura 2.13: Distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  na espessura

A *inclinação* do diagrama de tensões será dada por

$$2 \frac{|\sigma_{xx}^{max}|}{h} = \frac{2}{h} \left( \frac{6}{h^2} \right) |m_{xx}|$$

o que permite obter

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} z m_{xx} \quad (2.28)$$

A aplicação de um raciocínio análogo para as outras duas componentes do tensor das tensões permite escrever:

$$\sigma_{yy} = \frac{12}{h^3} z m_{yy} \quad (2.29)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{12}{h^3} z m_{xy} \quad (2.30)$$

Os valores extremos destas tensões encontram-se instaladas em pontos pertencentes aos planos superior e inferior da laje. O módulo desses valores extremos pode ser determinado a partir das igualdades:

$$|\sigma_{yy}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_{yy}| \quad ; \quad |\sigma_{xy}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_{xy}|$$

Mais complicada é a determinação da distribuição de tensões tangenciais,  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  e  $\sigma_{yz}(x, y, z)$ . Neste caso, a utilização das relações constitutivas

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xz} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z) = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{yz} \quad (2.32)$$

não é válida por se ter admitido que o material é rígido ao corte e não elástico.

Se por absurdo se se utilizassem essas equações, a conclusão seria que sendo nulas as distorções também seriam nulas as tensões tangenciais, pelo que por sua vez resultariam nulos os esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  em todos os pontos do plano médio da laje. Ora tal não faz sentido, como é fácil concluir.

Para se conseguir recuperar o andamento das tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , torna-se desta forma necessário desenvolver um raciocínio baseado em considerações de equilíbrio.

Recorde-se que as condições de equilíbrio da elasticidade tridimensional são [10]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0\end{aligned}$$

Considerando  $f_x = 0$ , a primeira destas equações pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

Substituindo nesta equação (2.28) e (2.30), obtém-se

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} z \left( \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

ou ainda, tendo em atenção (2.36),

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} z v_x \quad (2.34)$$

Admitindo que nas faces superior e inferior não existem quaisquer tensões tangenciais aplicadas,

$$(\sigma_{xz})_{z=\pm h/2} = 0 \quad ; \quad (\sigma_{yz})_{z=\pm h/2} = 0$$

e integrando a equação (2.34) entre  $z = -h/2$  e a coordenada genérica  $z$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^z z \, dz \, v_x \\ &= \frac{v_x}{h} \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

A mesma técnica aplicada agora à segunda equação de equilíbrio permite obter:

$$\sigma_{yz} = \frac{v_y}{h} \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

As tensões tangenciais  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  e  $\sigma_{yz}(x, y, z)$  associadas aos esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  apresentam na espessura da laje uma distribuição parabólica. Anulam-se nos pontos das faces superior e inferior e apresentam o valor máximo ao nível do plano médio. Estes valores máximos são dados por:

$$|\sigma_{xz}|^{max} = \frac{3}{2} \frac{|v_x|}{h}$$

$$|\sigma_{yz}|^{max} = \frac{3}{2} \frac{|v_y|}{h}$$

Na figura 2.14 representam-se as distribuições obtidas para as tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ .

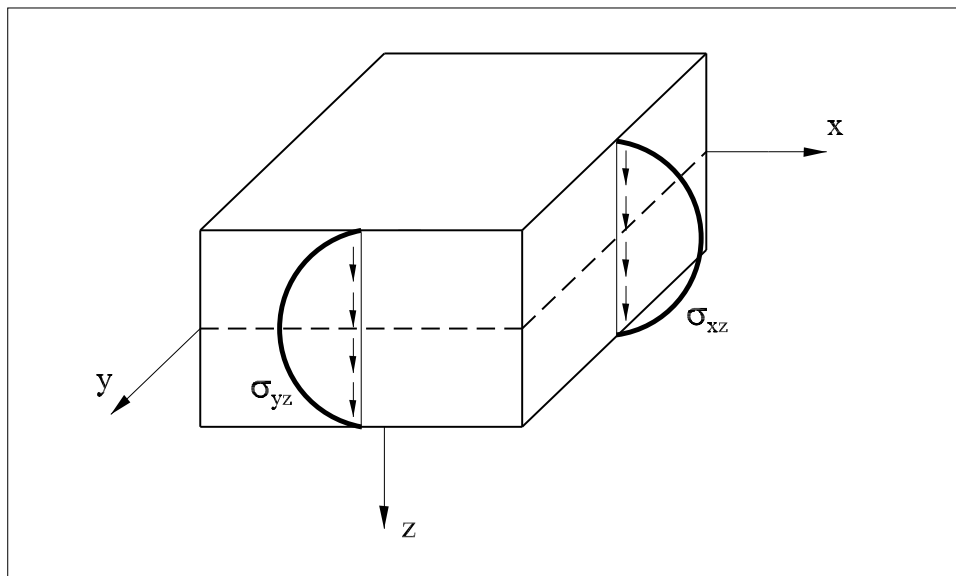


Figura 2.14: Distribuição das tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  na espessura

## 2.3 Relações Fundamentais

Neste instante estão definidas com rigor as grandezas generalizadas em função das quais se descreve o comportamento das lajes finas. Estas grandezas encontram-se representadas de forma esquemática no diagrama representado na figura 2.15. Falta agora definir as equações de compatibilidade que permitem determinar a relação entre as grandezas cinemáticas, deslocamentos generalizados e curvaturas. As grandezas estáticas, esforços e cargas aplicadas, devem respeitar as condições de equilíbrio. Por fim, as condições de elasticidade permitem estabelecer a relação entre esforços e curvaturas.

A obtenção deste conjunto de equações e a identificação do seu significado físico é tratada em detalhe nesta secção.



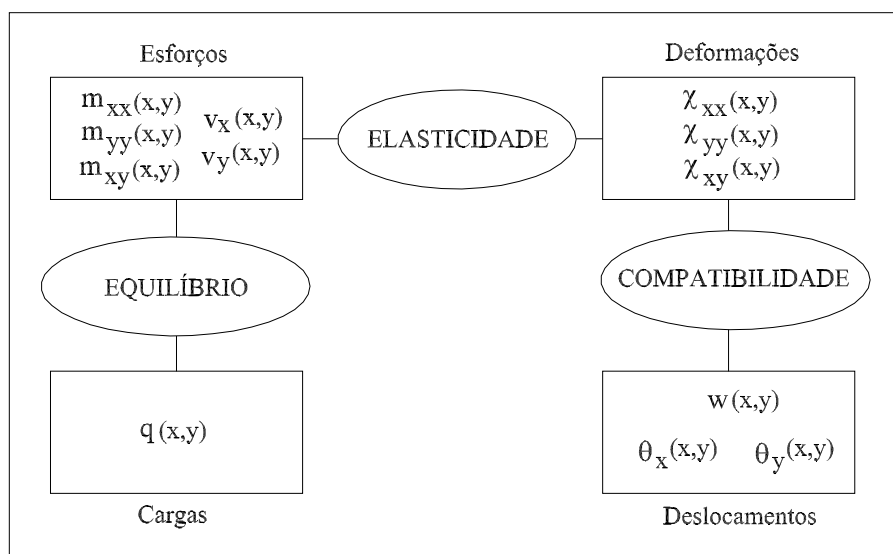


Figura 2.15: Grandezas a conhecer para se caracterizar o comportamento de lajes finas

### 2.3.1 Condições de compatibilidade

As condições de compatibilidade permitem relacionar os campos de curvaturas  $\chi_{xx}(x, y)$ ,  $\chi_{yy}(x, y)$  e  $\chi_{xy}(x, y)$  com o campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Estas equações foram já obtidas na secção 2.2.2. As equações (2.13) e (2.14) definem as duas curvaturas de flexão, e a condição (2.17) permite obter a curvatura de torção.

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE	
$\chi_{xx}(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$
$\chi_{yy}(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$
$\chi_{xy}(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$

Tabela 2.1: Condições de compatibilidade

Recorde-se que as curvaturas medem as taxas de variação das rotações

$$\chi_{xx}(x, y) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\chi_{yy}(x, y) = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\chi_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

as quais dependem dos deslocamentos transversais em consequência das hipóteses de Kirchhoff

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

A analogia com as condições de compatibilidade em elementos de viga é imediata. Neste tipo de estruturas, a condição de compatibilidade no domínio pode ser expressa na forma:

$$\chi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.35)$$

### 2.3.2 Condições de equilíbrio

As condições de equilíbrio relacionam os campos de esforços na laje,  $m_{xx}(x, y)$ ,  $m_{yy}(x, y)$ ,  $m_{xy}$ ,  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$ , com a carga aplicada,  $q(x, y)$ . Como se demonstrará na secção seguinte, as condições de equilíbrio podem ser expressas da seguinte forma:

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$	(2.36)
$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} = v_y$	(2.37)
$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q(x, y) = 0$	(2.38)

Tabela 2.2: Condições de equilíbrio

Frequentes vezes, as três condições de equilíbrio acima indicadas são transformadas numa equação apenas. Basta para tal substituir (2.36) e (2.37) na condição (2.38). Obtém-se uma única equação que relaciona os dois campos de momentos flectores,  $m_{xx}(x, y)$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$	(2.39)

Tabela 2.3: Condições de equilíbrio; formato condensado

e  $m_{yy}(x, y)$ , o campo de momentos torsores,  $m_{xy}(x, y)$ , e a carga distribuída aplicada,  $q(x, y)$ .

Este é o formato mais usual para as condições de equilíbrio. A semelhança com os elementos de viga é mais uma vez quase imediata. Neste tipo de elementos, as condições de equilíbrio podem ser escritas na forma:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2.40)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (2.41)$$

ou, reunindo as duas condições numa só,

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \quad (2.42)$$

### 2.3.3 Obtenção das condições de equilíbrio\*

As condições de equilíbrio acima enunciadas podem ser obtidas utilizando um raciocínio semelhante ao seguido na determinação das equações de equilíbrio em elementos de viga. Para tal, é necessário estabelecer as equações de equilíbrio global num elemento infinitesimal de laje. Na figura 2.16 representa-se o correspondente diagrama de corpo livre.

Como se analisa um troço infinitesimal da laje, pode considerar-se que a carga distribuída é constante e que a variação dos esforços ao longo de  $x$  e de  $y$  é linear. A imposição das três condições de equilíbrio global conduz directamente à obtenção das equações (2.36), (2.37) e (2.38).

A equação de equilíbrio de forças verticais permite desta forma estabelecer que:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -v_x dy + \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy - v_y dx + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

Simplificando a expressão anterior vem

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

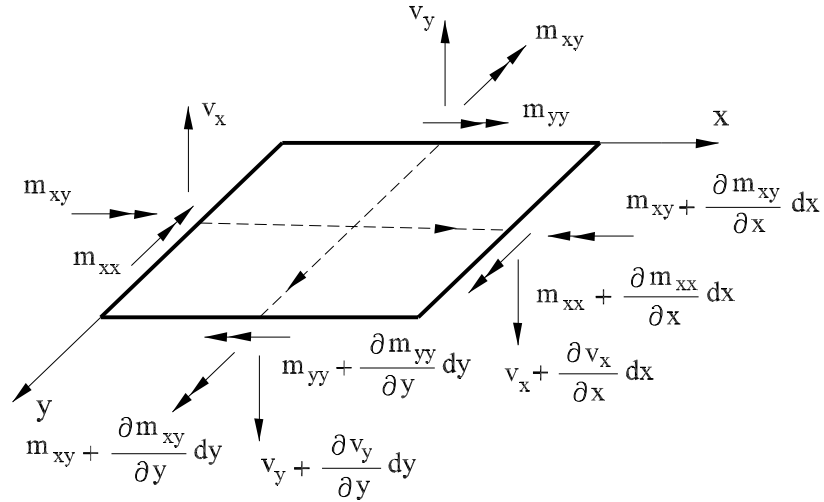


Figura 2.16: Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de laje

Tendo em conta que esta equação se deve verificar para qualquer valor de  $dx$  e de  $dy$  não nulos, recupera-se a equação de equilíbrio (2.38),

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0$$

Considere-se agora a resultante de momentos em torno do eixo  $y$  calculada em relação ao ponto  $A$ , de coordenadas  $(0, 0)$ . Pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \sum M_y^A = 0 \Rightarrow & -m_{xx} dy + \left( m_{xx} + \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx \right) dy - m_{xy} dx + \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \\ & + v_y dx \frac{dx}{2} - \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dx \\ & - q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão anterior e desprezando os infinitésimos de ordem superior, obtém-se a equação

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$$

Finalmente, a terceira equação de equilíbrio é obtida quando se impõe que a resultante dos momentos em torno do eixo  $x$ , e calculada em relação ao ponto  $A$  se deve anular também. A análise do digrama de corpo livre apresentado na figura 2.16 permite escrever que:

$$\sum M_x^A = 0 \Rightarrow -m_{yy} dx + \left( m_{yy} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} dy \right) dx - m_{xy} dy + \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy$$

$$\begin{aligned}
& +v_x dy \frac{dy}{2} - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} - \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dy \\
& -q dx dy \frac{dy}{2} = 0
\end{aligned}$$

Deprezoando de novo os infinitésimos de ordem superior e simplificando a expressão, resulta de imediato que

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} = v_y$$

### 2.3.4 Relações de elasticidade

A relação entre os campos de momentos e os campos de curvaturas é dependente do tipo de comportamento que se admite para o material constituinte da laje. Tendo sido admitida como válida a hipótese da linearidade física, a relação esforços-deformações é linear e dependente das características geométricas da laje (nomeadamente da sua espessura) e das características mecânicas que permitem caracterizar o comportamento elástico linear do material estrutural (módulo de elasticidade,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ ).

As relações de elasticidade podem ser escritas na forma:

RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE RIGIDEZ	
$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.43)$	

Tabela 2.4: Relações de elasticidade escritas no formato de rigidez

Este é o formato de rigidez para as relações de elasticidade e é, regra geral, o que mais interessa na resolução dos problemas que se surgirão no seguimento. No entanto, situações há em que é necessário determinar as curvaturas associadas a um determinado campo de momentos. Para tal, é possível inverter a equação (2.43) e obter as relações de elasticidade escritas num formato de flexibilidade, tal como se indica no quadro 2.5.

### 2.3.5 Significado físico das relações constitutivas

Antes de se discutir a forma através da qual se podem deduzir as relações de elasticidade, importa salientar o significado físico da informação contida na equação (2.43).

RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE FLEXIBILIDADE	
$\begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{12}{E h^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.44)$	

Tabela 2.5: Relações de elasticidade escritas no formato de flexibilidade

Antes de mais, é possível verificar que os comportamentos *flexão/torção* se encontram perfeitamente desacoplados. Desta forma, se na laje apenas estiverem instaladas curvaturas de flexão, apenas existirão momentos flectores, sendo nulos os momentos torsores. Por outro lado, se apenas existirem curvaturas de torção, os campos de momentos flectores resultarão de imediato nulos.

A *leitura* da informação contida no formato de flexibilidade das relações constitutivas permite recuperar exactamente o mesmo comportamento. Para que surjam na laje curvaturas de flexão, é necessário que existam momentos flectores não nulos; para que a curvatura de torção tome valores diferentes de zero, é necessário que exista instalado na laje um campo de momentos torsores.

Outra informação relevante resulta da identificação do significado físico de cada uma das colunas da matriz de rigidez da laje,

$$\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

A primeira coluna desta matriz corresponde aos esforços que se instalam na laje quando se impõe uma deformada caracterizada por  $\chi_{xx}(x, y) = 1.0$  e  $\chi_{yy}(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ . Recorde-se que na figura 2.5 se encontra representada uma deformada que é caracterizada por apresentar esse campo de deformações. Os esforços que aparecem nesta situação são dados por:

$$\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

São vários os comentários que se podem efectuar a partir da análise de (2.46). Desde logo, é possível verificar que o parâmetro

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.47)$$

corresponde ao valor do momento  $m_{xx}$  que é necessário aplicar para que na laje surja uma deformação por flexão  $\chi_{xx}$  com valor unitário. A esse parâmetro  $D_f$  é usual chamar *rigidez à flexão* do elemento de laje.

O segundo ponto a ter em conta é algo surpreendente se se tiver em conta apenas o que é conhecido para o caso dos elementos de viga. Se se considerar de forma simplificada a laje como um *somatório* de um conjunto de vigas com eixo paralelo a  $x$  e outro conjunto de barras com eixo paralelo a  $y$ , o campo de deformações imposto faz com que as primeiras barras apresentem deformação por flexão, enquanto que as segundas permanecem indeformadas. Desta forma, seria à primeira vista de esperar que o campo de momentos  $m_{xx}(x, y)$  fosse diferente de zero, enquanto que o campo de momentos  $m_{yy}(x, y)$  se anularia.

Ora a equação (2.46) permite verificar de imediato que esta conclusão está errada. De facto, de (2.46) obtém-se:

$$\begin{aligned} m_{xx}(x, y) &= D_f \\ m_{yy}(x, y) &= \nu D_f \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$m_{yy}(x, y) = \nu m_{xx}(x, y) \quad (2.48)$$

Só quando o coeficiente de Poisson se anula é que o campo de momentos  $m_{yy}$  se anula também.

Existe uma explicação simples física bem simples para este facto. Considere-se que a laje resulta de um somatório de vigas com eixo paralelo a  $x$  colocadas uma ao lado das outras (ver figura 2.17).

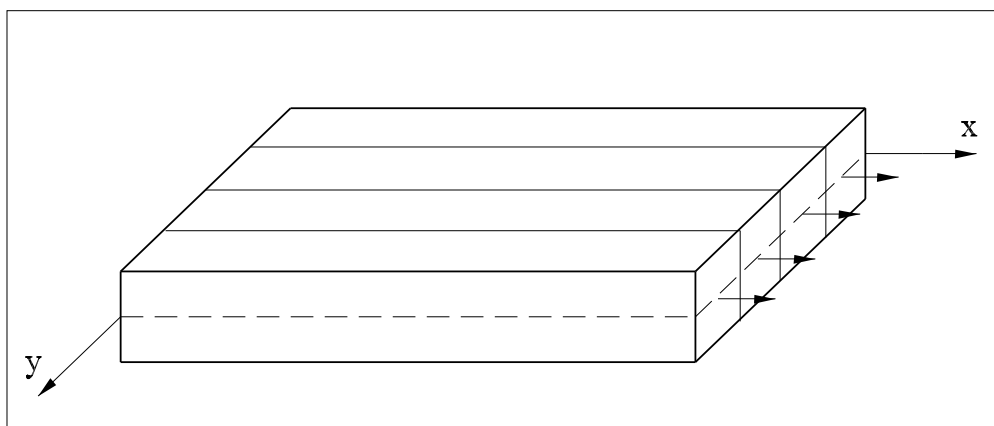


Figura 2.17: Conjunto de vigas com eixo paralelo ao eixo  $x$

Quando se impõe o campo de deformações  $\chi_{xx}(x, y) = 1.0$  e  $\chi_{yy}(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ , estas vigas vão flectir, tal como se encontra representado na figura 2.18.

As fibras longitudinais inferiores encontram-se traccionadas, as superiores comprimidas. O que se passa então ao nível da secção transversal se se tiver em conta o efeito de Poisson?

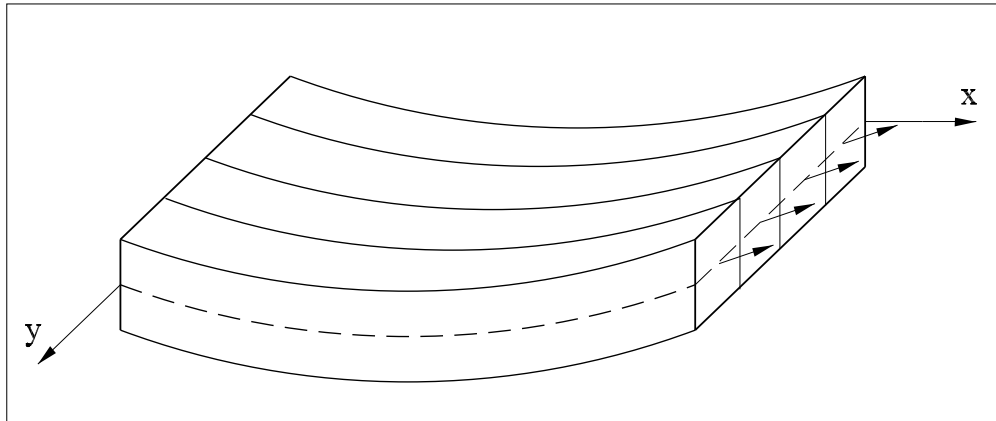


Figura 2.18: Deformação por flexão das vigas com eixo paralelo ao eixo  $x$

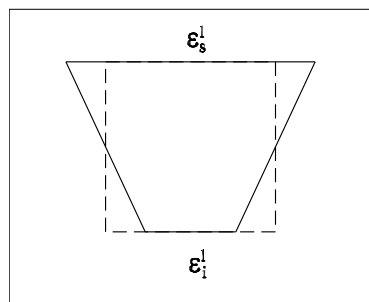


Figura 2.19: Deformação da secção transversal



Na figura 2.19 representa-se a deformada da secção transversal de uma das barras em que se considera sub-dividida a laje.

$\epsilon_s^l$   $\{\epsilon_i^l\}$  representa a extensão axial das fibras longitudinais na face superior {inferior} da viga. O que aconteceria à laje se todas as vigas consideradas anteriormente se deformassem desta forma?

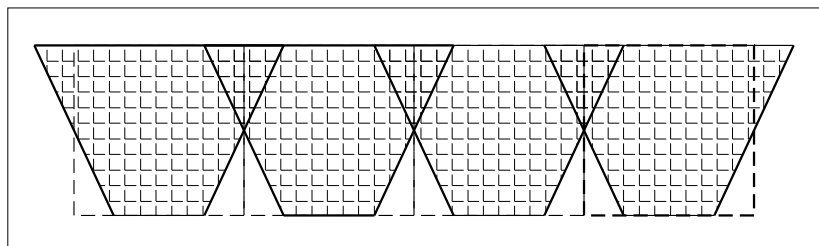


Figura 2.20: Deformada das secções transversais

A figura 2.20 permite verificar que a “soma” das deformadas conduz a uma situação absurda, na qual existem zonas de sobreposição de material e outras onde surgem buracos na deformada. Para que esta situação não ocorra, é necessário que as secções transversais consideradas se mantenham sem deformações, para que a deformada global permaneça compatível. Isto faz com que tenha de existir um momento flector aplicado ao longo da direcção transversal, momento esse que provoque deformações iguais e de sinal contrário às que são induzidas pela deformada de flexão ao longo de  $x$ . Não é difícil verificar que esse momento é dado por  $m_{yy} = \nu m_{xx}$ , tal como se encontra esquematicamente ilustrado na figura 2.21. Encontra-se desta forma justificada de forma intuitiva a equação (2.48).

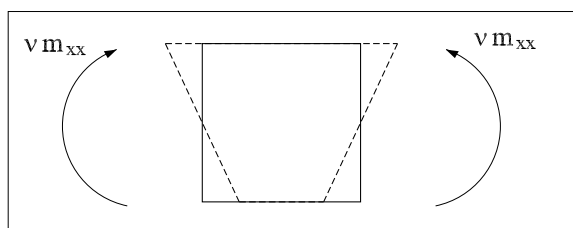


Figura 2.21: Momento a aplicar segundo a direcção transversal

Será agora interessante comparar a rigidez à flexão da laje,  $D_f$ , com a rigidez à flexão de um elemento de viga. Como os esforços na laje são definidos por unidade de comprimento, a comparação deverá ser efectuada com o comportamento de um elemento de viga com secção rectangular onde a altura é igual à altura da laje e a largura é unitária. Na viga tem-se

$$M = EI \chi \quad (2.49)$$

$$M = E \frac{h^3}{12} \chi \quad (2.50)$$

No elemento de laje, a identificação do significado físico dos elementos da matriz de rigidez (2.45) permite recuperar

$$m_{xx} = E \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \chi_{xx} \quad (2.51)$$

Comparando as equações (2.50) e (2.52), verifica-se que há uma ligeira diferença entre as rigidezes à flexão das vigas e das lajes. Estas grandezas serão coincidentes apenas quando se considera como nulo o coeficiente de Poisson ( $\nu = 0$ ). Pode dizer-se que a “inércia equivalente” de uma faixa de laje com um metro de largura é dada por:

$$I_{eq} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.52)$$

Esta informação será retomada no capítulo em que se descreve a modelação de lajes com elementos de grelha.

Interessante ainda é verificar qual apresenta um valor maior, se a rigidez à flexão da viga, ou a rigidez à flexão da laje. Ou seja, o momento  $m_{xx}$  que é necessário aplicar para instalar uma curvatura de flexão unitária ao longo de  $x$  na laje é maior ou mais pequeno que o momento que é necessário aplicar na viga para ter exactamente o mesmo tipo de deformação?

As equações (2.50) e (2.52) permitem verificar que a rigidez de flexão da laje é ligeiramente superior à da viga. Existe uma justificação simples para este facto, que de novo está relacionado com a existência do constrangimento lateral que existe nos elementos de laje e que está ausente no caso dos elementos de viga.

A segunda coluna da matriz de rigidez (2.45), corresponde agora aos esforços que surgem na laje quando se impõe que  $\chi_{yy}(x, y) = 1.0$  e  $\chi_{xx}(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ . Um dos campos de deslocamentos representados na figura 2.5 é caracterizado pelos campos de deformações acima indicados. É possível escrever-se:

$$\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} \nu \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Os comentários que aqui se podem tecer são em tudo semelhantes aos que foram efectuados a propósito da identificação do significado físico da primeira coluna da matriz de rigidez.

Finalmente, a terceira coluna da matriz de rigidez corresponde aos esforços que surgem na laje quando se impõe uma curvatura de torção com valor unitário,  $\chi_{xy} = 1$ , e se garante que as curvaturas de flexão se anulam,  $\chi_{xx} = \chi_{yy} = 0$ . Obtém-se nesta situação:

$$\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\nu \end{bmatrix} = D_t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

O parâmetro

$$D_t = \frac{E h^3}{12(1 + \nu)} \quad (2.55)$$

corresponde à rigidez à torção da laje, ou seja, o valor do momento torsor que é necessário aplicar para que se instale na laje uma curvatura de torção com valor unitário.

De novo será interessante efectuar um paralelo com o que se passa na teoria das peças lineares. Qual é a rigidez à torção de uma viga com secção transversal rectangular com  $b = 1\text{ m}$  e  $h = h_{\text{laje}}$ ? Recorde-se que se tem

$$M_t = GJ\phi = \frac{E}{2(1 + \nu)} J\phi$$

em que  $M_t$  é o momento torsor na viga e  $\phi$  corresponde à deformação por torção. Considerando que se trata de uma secção rectangular e assumindo que  $b \gg h$ , pode escrever-se

$$M_t = GJ\phi = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{h^3}{3} \phi \quad (2.56)$$

As relações constitutivas da laje permitem escrever

$$m_{xy} = \frac{E h^3}{12(1 + \nu)} \chi_{xy} \quad (2.57)$$

$$m_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{h^3}{6} \chi_{xy} \quad (2.58)$$

A comparação entre as igualdades (2.56) e (2.58) permite concluir que a “rigidez à torção equivalente” de uma faixa de laje com um metro de largura é fornecida por

$$J_{eq} = \frac{h^3}{6}$$

Esta informação será de novo relevante quando se discutir mais à frente a modelação de lajes com elementos de grelha.

As igualdades anteriores permitem ainda concluir que a rigidez à torção da laje é igual a metade da rigidez à torção de um elemento de viga com a secção transversal com as dimensões anteriormente indicadas. Mais uma vez, existe uma explicação simples e intuitiva. É que no caso das lajes, e tal como foi discutido na secção 2.2.3, existem dois momentos torsores que actuam em simultâneo. De uma forma um pouco mais rigorosa, pode afirmar-se então que para o aparecimento de uma curvatura de torção unitária contribuem os momentos torsores ao longo de  $x$  ( $m_{xy}$ ) e os momentos torsores ao longo de  $y$  ( $m_{yx} = m_{xy}$ ).

### 2.3.6 Obtenção das relações de elasticidade\*

Para se determinarem as relações de elasticidade, considerem-se as relações tensões-deformações definidas pela lei de Hooke. Se se assumir que as tensões normais  $\sigma_{zz}$  são

desprezáveis, é possível escrever-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Conhecida a relação tensões-deformações e a relação entre estas grandezas e as correspondentes grandezas generalizadas (esforços e curvaturas), é possível obter-se a relação de elasticidade procurada. Para tal, basta substituir as igualdades (2.25), (2.26) e (2.27) na equação anterior, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} z \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}$$

Se se considerarem agora as definições (2.19), (2.22) e (2.20), é possível obter-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.4 Equação de Lagrange

Nas secções anteriores definiram-se as grandezas em função das quais se descreve o comportamento das lajes finas e obtiveram-se as equações que permitem relacionar essas mesmas grandezas.

O diagrama da figura 2.22 resume toda a informação apresentada e discutida nas secções anteriores.

Para que um dado campo de deslocamentos possa ser considerado como a solução exacta, é necessário que as curvaturas obtidas a partir das condições de compatibilidade permitam dar origem a um campo de esforços que satisfaça as condições de equilíbrio.

Pode desta forma dizer-se que uma dada solução só poderá ser exacta se satisfizer em simultâneo as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

À semelhança do que se passa no elemento de viga, também é possível obter uma equação que resulta da condensação das três equações fundamentais atrás descritas. Recorde-se

$$v_x(x, y) = \frac{\partial m_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial y}$$

$$v_y(x, y) = \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}(x, y)}{\partial y}$$

$$\begin{matrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

$$q(x, y)$$

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

$$w(x, y)$$

Figura 2.22: Grandezas e equações fundamentais nas lajes de Kirchhoff

que no caso do elemento de viga, a junção das condições (2.35), (2.42) e (2.49) permite obter a equação

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI}$$

que relaciona a quarta derivada do campo de deslocamentos transversais com a carga distribuída aplicada e com a rigidez de flexão da viga,  $EI$ . No caso das lajes finas também é possível efectuar a junção das condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade na obtenção de uma única equação. Desta forma, se se substituírem as condições de compatibilidade nas relações constitutivas obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Se se substituírem estes campos de momentos na equação de equilíbrio (2.39), resulta após a execução de algumas simplificações:

EQUAÇÃO DA LAJE (EQUAÇÃO DE LAGRANGE)	
$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (2.60)$	(2.60)

Tabela 2.6: Equação de Lagrange

Esta é a equação diferencial que rege o comportamento da laje e é geralmente conhecida como Equação de Lagrange. A analogia com o que se passa nos elementos de viga é mais uma vez notória. A equação de Lagrange também relaciona quartas derivadas dos campos de deslocamentos transversais com a carga distribuída aplicada e com a rigidez à flexão da laje,  $D_f$ .

A semelhança entre as equações da viga e da laje ainda é maior se se escrever a equação de Lagrange na forma:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (2.61)$$

onde

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Para se conseguir determinar a solução para uma dada laje será suficiente a utilização da equação de Lagrange? Tal como no caso das peças lineares, a consideração da equação

diferencial no domínio não permite, por si só, que se consiga determinar a solução para o problema que se coloca. Para que a análise se possa efectuar, torna-se indispensável que se especifiquem as condições de fronteira para o problema. As condições de fronteira podem ser de dois tipos: as condições de fronteira cinemáticas, nas quais se especifica qual o valor dos deslocamentos num determinado bordo, e as condições de fronteira estáticas, que passam pela imposição de um determinado valor para as cargas directamente aplicadas nesse bordo.

## 2.5 Definição das condições de fronteira

Discutem-se nesta secção quais as condições de fronteira mais usuais em problemas de lajes. Considera-se que os troços da fronteira de uma laje, aos quais se costuma chamar bordos, se podem encontrar encastrados, simplesmente apoiados ou ainda livres.

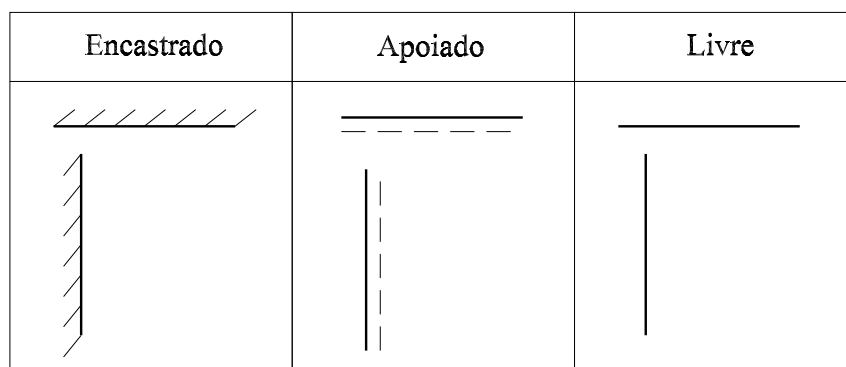


Figura 2.23: Tipos de apoios a considerar

A simbologia adoptada para referenciar cada um desses tipos de apoio encontra-se representada na figura 2.23. Por simplicidade, considera-se na apresentação que se segue que todos os bordos são paralelos a algum dos eixos do sistema de coordenadas,  $(x, y)$ . No entanto, e sempre que tal se justifique, discutir-se-á a generalização dos resultados obtidos para o caso mais geral em que o bordo se encontra inclinado em relação ao referencial adoptado.

### 2.5.1 Bordos encastrados

Considere-se a laje rectangular representada na figura 2.24. Todos os bordos encontram-se encastrados. Quais são então as condições de fronteira a verificar neste caso?

Começemos por analisar o bordo I. Numa primeira abordagem, e sobretudo se se tiver em conta o que se passa nos nós encastrados de um elemento de viga, poder-se-á dizer que as

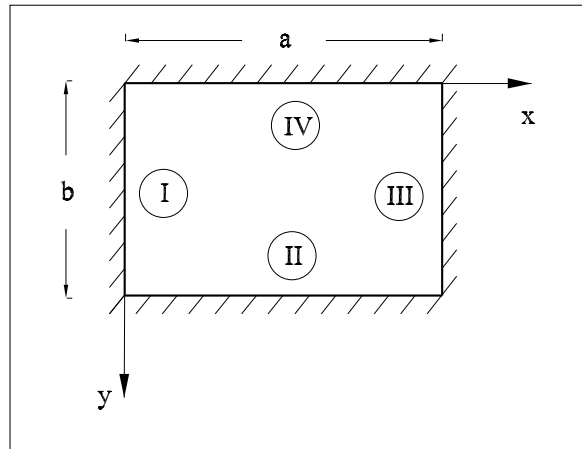


Figura 2.24: Laje rectangular com todos os bordos encastrados

condições a impor são:

$$w(0, y) = 0 \quad (2.62)$$

$$\theta_x(0, y) = 0 \quad (2.63)$$

$$\theta_y(0, y) = 0 \quad (2.64)$$

É importante salientar desde já que para que uma dada condição de fronteira se verifique ao longo de um determinado bordo, é necessário que essa condição seja verdadeira em todos os pontos pertencentes a essa fronteira. Basta que haja um só ponto onde a equação em causa não seja verificada, para que se possa dizer de imediato que a condição de fronteira não está satisfeita.

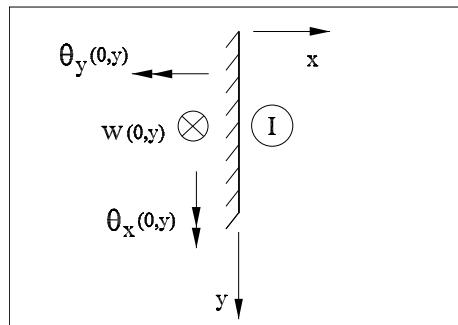


Figura 2.25: Condições de fronteira a considerar ao longo do bordo I

A pergunta que se coloca neste instante é a seguinte: será que no bordo I é necessário



impor directamente as três condições indicadas nas equações (2.62), (2.63) e (2.64)? Ou, pelo contrário, há alguma das condições que dependem das restantes?

Tendo em conta a equação (2.7), é possível verificar de imediato que a condição  $w(0, y) = 0$  implica que  $\theta_y(0, y) = 0$ . Desta forma, neste bordo da laje encastrada as condições de fronteira a considerar são:

$$w(0, y) = 0$$

$$\theta_x(0, y) = 0$$

De uma forma geral, pode afirmar-se que num bordo encastrado há sempre duas condições de fronteira cinemática a verificar. O deslocamento transversal deve ser nulo, assim como deve ser nula a rotação em torno do bordo em causa. Na laje representada na figura 2.24, essas condições correspondem a

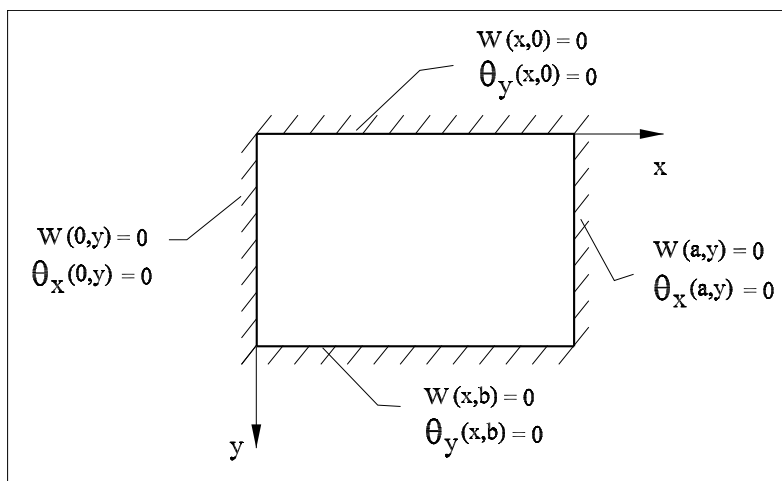


Figura 2.26: Condições de fronteira a considerar na laje com todos os bordos encastrados

Vamos considerar agora que o bordo encastrado se encontra inclinado em relação ao sistema de eixos considerado. Ter-se-à, por exemplo, uma situação semelhante à que se encontra representada na figura 2.27.

Tratando-se de um bordo encastrado, deverão ser nulos os deslocamentos transversais e as rotações em torno da recta  $y = rx + s$ , representados na figura 2.27 respectivamente por  $w(x, rx + s)$  e  $\theta_n(x, rx + s)$ . Qual a relação entre esta rotação e as rotações  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ ? A maneira mais fácil de responder a esta pergunta consiste em efectuar a mudança de coordenadas representada na figura 2.28.

Podem agora escrever-se as condições de fronteira no formato

$$w(x, rx + s) = 0$$

$$\theta_{y'}(x, rx + s) = 0$$

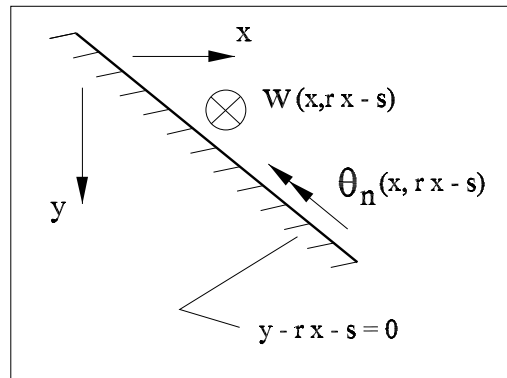


Figura 2.27: Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado inclinado

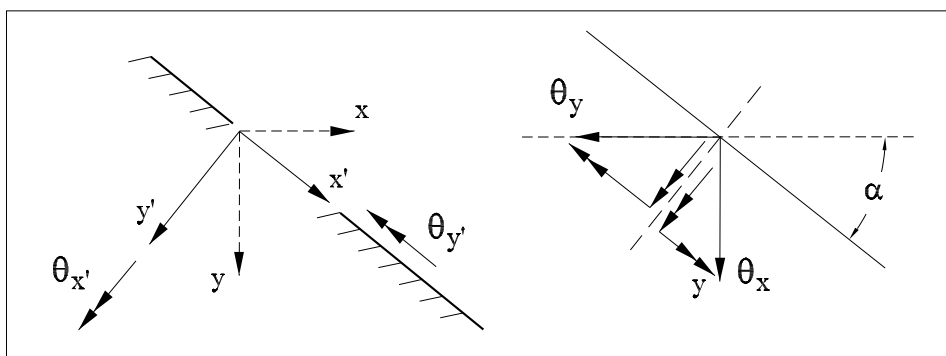


Figura 2.28: Mudança de coordenadas

Tendo em conta que os campos de rotações são grandezas vectoriais, é simples verificar que:

$$\theta_{y'} = -\theta_x \sin(\alpha) + \theta_y \cos(\alpha)$$

A figura 2.29 resume as condições de fronteira a considerar num bordo encastrado, onde  $\theta_n$  representa a rotação em torno de um bordo com normal exterior com a direcção de  $n$ .

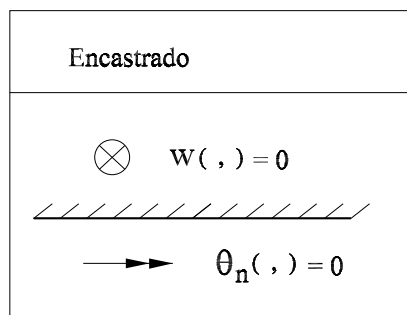


Figura 2.29: Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado

A existência de duas condições de fronteira em cada bordo é uma característica que vai estar presente também no caso dos bordos simplesmente apoiados e no caso dos bordos livres.

## 2.5.2 Bordos simplesmente apoiados

Considere-se agora a laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno e que se encontra representada na figura 2.30. Neste tipo de apoio, e à semelhança do que

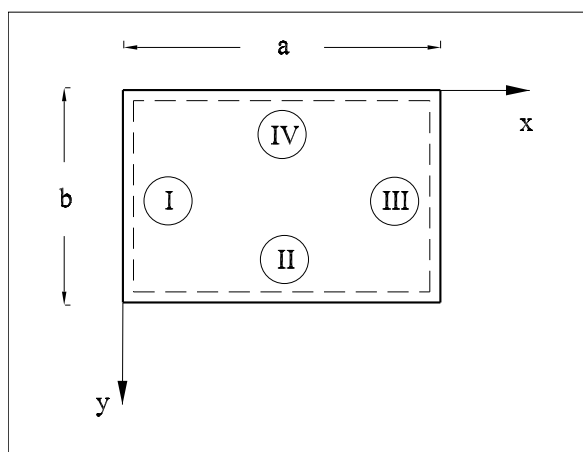


Figura 2.30: Laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno

acontece nos nós simplesmente apoiados dos elementos de viga, as condições de fronteira

passam pela imposição do valor de uma grandeza cinemática (campo de deslocamentos transversais) e de uma grandeza estática (campo de momento flector ao longo da direcção da normal exterior ao bordo). Na figura 2.31 encontram-se todas as condições de fronteira a considerar para a laje apresentada na figura 2.30. Nesta figura,  $\bar{m}_I$ ,  $\bar{m}_{II}$ ,  $\bar{m}_{III}$ , e  $\bar{m}_{IV}$ , correspondem a distribuições de momentos aplicados ao longo do contorno da laje. Caso não existam distribuições de momentos aplicados sobre os bordos em causa, os valores de  $\bar{m}_J$  devem ser considerados como nulos.

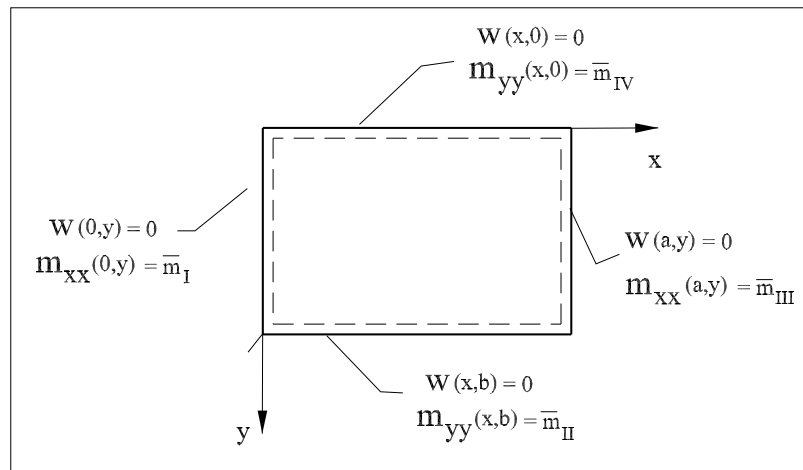


Figura 2.31: Condições de fronteira a verificar numa laje rectangular simplesmente apoiada

A figura 2.32 resume as condições de fronteira a considerar num bordo simplesmente apoiado. Nessa figura,  $m_{nn}(x,y)$  representa o campo de momentos flectores existente ao longo da direcção definida pela normal exterior ao bordo em análise.

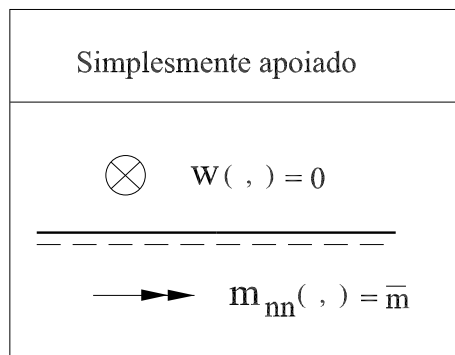


Figura 2.32: Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado

Para finalizar a discussão deste tipo de apoios, falta apenas verificar o que se passa quando o bordo simplesmente apoiado se encontra inclinado. Tendo em conta a mudança de coordenadas referida acima, é possível verificar que o momento que se deve anular ao longo do

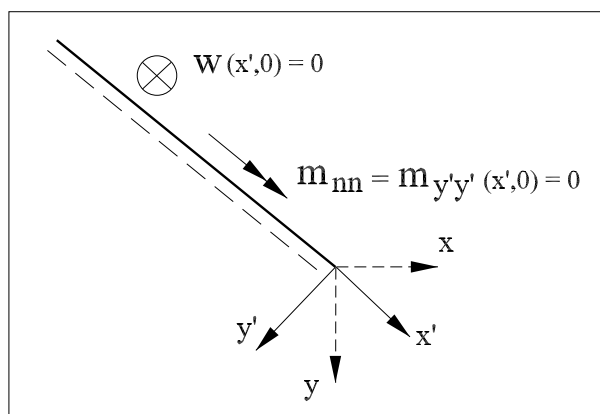


Figura 2.33: Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado inclinado

bordo apoiado é o momento flector  $m_{y'y'}$ . Tendo em atenção que os campos de momentos flectores e torsões definem um tensor simétrico de segunda ordem, a mudança de coordenadas indicada implica a utilização das leis de transformação tensoriais. Desenvolvendo as equações (2.24), obtém-se:

$$m_{x'x'} = m_{xx} \cos^2(\alpha) + m_{yy} \sin^2(\alpha) + 2 m_{xy} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$m_{y'y'} = m_{xx} \sin^2(\alpha) + m_{yy} \cos^2(\alpha) - 2 m_{xy} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$m_{x'y'} = \frac{1}{2}(-m_{xx} \sin(2\alpha) + m_{yy} \sin(2\alpha) + 2 m_{xy} \cos(2\alpha))$$

### 2.5.3 Bordos livres

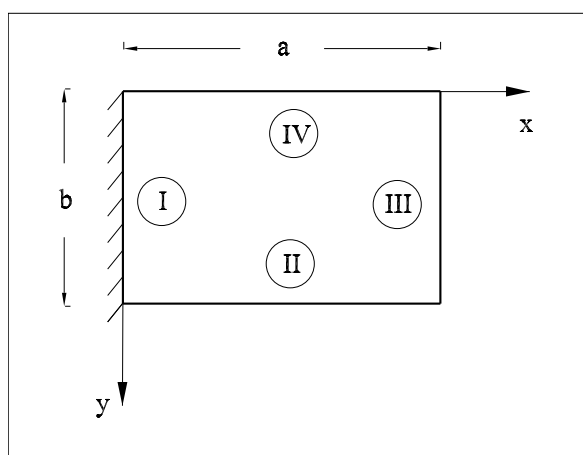


Figura 2.34: Laje com bordos livres

É no tratamento dos bordos livres que surge uma novidade em relação ao que é habitual considerar na teoria de vigas. Considere-se então a laje representada na figura 2.34,

onde todos os bordos se encontram livres, à exceção do bordo  $x = 0$ , que se encontra encastrado.

Quais são as condições a impor no bordo III? Tratando-se de um bordo onde não é imposto qualquer deslocamento, é natural considerar que todos os esforços se devem anular (a menos que existam distribuições de cargas ou momentos aplicados ao longo desse bordo). Numa primeira análise, deverão então considerar-se as condições (ver figura 2.35)

$$v_x(a, y) = 0 \quad (2.65)$$

$$m_{xx}(a, y) = 0 \quad (2.66)$$

$$m_{xy}(a, y) = 0 \quad (2.67)$$

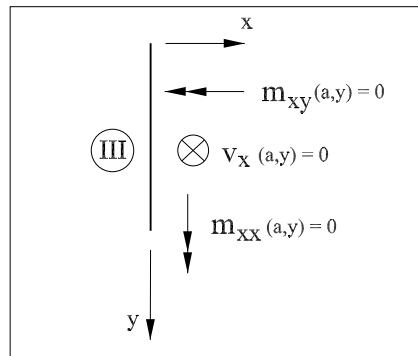


Figura 2.35: Condições a considerar no bordo III

A existência de três condições ao longo de um mesmo bordo contradiz desde logo o que foi dito anteriormente. Recorde-se que se afirmou que independentemente das condições de apoio, apenas é possível impor duas condições de fronteira independentes por bordo. Esta afirmação tem uma justificação matemática rigorosa. É possível demonstrar-se que as equações diferenciais do tipo da Equação de Lagrange apenas permitem a imposição de duas condições em cada troço em que se considera sub-dividida a fronteira do domínio em estudo.

Tal como no caso do bordo encastrado, há a necessidade de se transformarem duas dessas condições em apenas uma. No bordo encastrado, as dependências existem entre a imposição do deslocamento transversal e a imposição da rotação em torno da normal ao bordo. Transpondo essa informação para o bordo livre, a intuição diz-nos que as duas condições a fundir deverão dizer respeito aos esforços transversos  $v_x$  (força vertical) e ao momento torsor  $m_{xy}$  (momento em torno da normal ao bordo).

Para se definir uma grandeza estaticamente equivalente ao esforço transversal e ao momento torsor, considere-se a informação contida na figura 2.36, onde se encontram representados de forma esquemática esses dois esforços ao longo do bordo III.

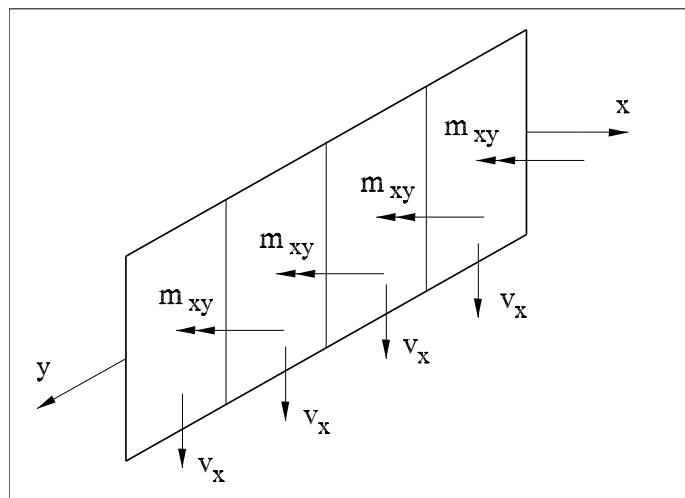


Figura 2.36: Esforços transversos e momentos torsões no bordo III

Considere-se que a laje se encontra sub-dividida num conjunto de “fatias”, também indicadas na mesma figura. O número de sub-divisões é arbitrário e pode ser considerado tão grande quanto se queira.

A forma mais fácil de se poder efectuar a “soma” destes dois esforços, consiste em transformar a distribuição de momentos torsões numa distribuição de forças verticais estaticamente equivalentes. Para tal efeito, substitui-se em cada uma das fatias consideradas na figura 2.36 o momento torsor resultante por um binário que lhe seja estaticamente equivalente. Obter-se-á então a distribuição de forças verticais representadas na figura 2.37.

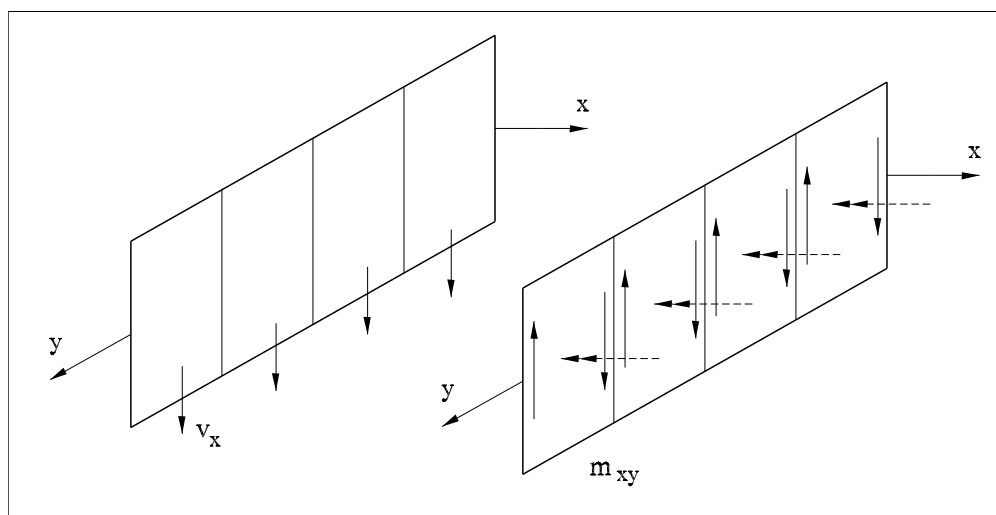


Figura 2.37: Equivalência estática no bordo III

O que acontece se o momento torsor for constante ao longo de todo o bordo? Todas

as forças verticais que surgem nesta transformação têm o mesmo valor. Desta forma, a resultante dessas forças nas fronteiras entre fatias é nula. O momento torsor no lado será então estaticamente equivalente a duas forças concentradas aplicadas nos vértices do bordo considerado.

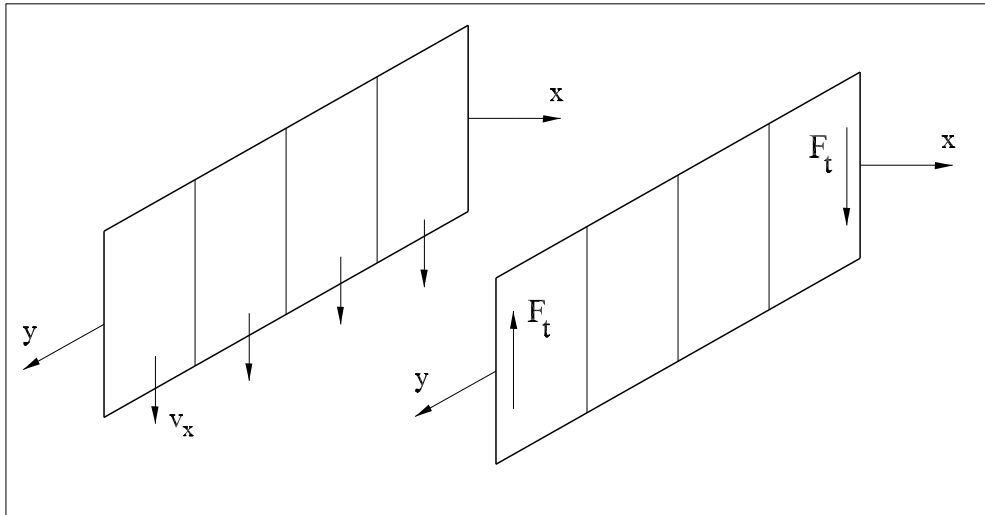


Figura 2.38: Aparecimento de forças de canto no bordo III

O esforço transverso “efectivo” continua a ser idêntico à distribuição  $v_x$ , surgindo apenas a necessidade de se considerar a existência de forças de canto,  $F_t$ . Para verificar quanto valem estas forças, considere-se o que se passa na transformação momento torsor/binário numa fatia de laje de comprimento infinitesimal  $dy$ .

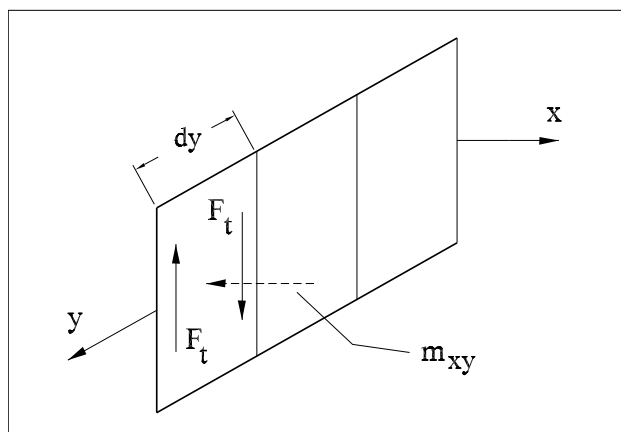


Figura 2.39: Determinação do valor das forças de canto

Não esquecendo que nas lajes os momentos têm uma dimensão física de momento por



unidade de comprimento, é possível escrever:

$$m_{xy} \times dy = F_t \times dy \Rightarrow F_t = m_{xy} \quad (2.68)$$

Considere-se agora que toda a laje está sujeita a um campo de momentos torsores constante e com um valor positivo. A transformação destes momentos torsores em binários permite de imediato obter

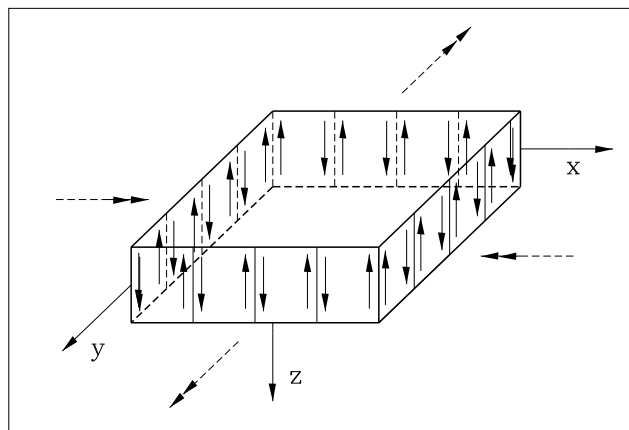


Figura 2.40: Equivalência estática em toda a laje

Se  $m_{xy}$  constante, todas as forças na interface entre fatias se anulam e apenas restam as forças concentradas nos cantos, que terão um valor dado por  $2 m_{xy}$ , tal como se encontra indicado na figura 2.41.

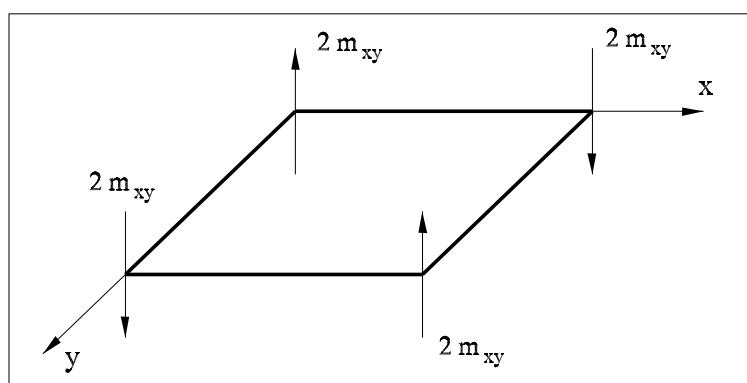


Figura 2.41: Valor das forças de canto em toda a laje

A construção anterior foi efectuada considerando que a distribuição de momentos torsores é constante. Ora esta situação é pouco frequente, pelo que se torna necessário averiguar quais as alterações a introduzir quando o valor de  $m_{xy}$  varia ao longo do bordo. Considere-se de novo o que se passa no bordo III, quando se assume que  $m_{xy}$  aumenta ao longo de  $y$ .

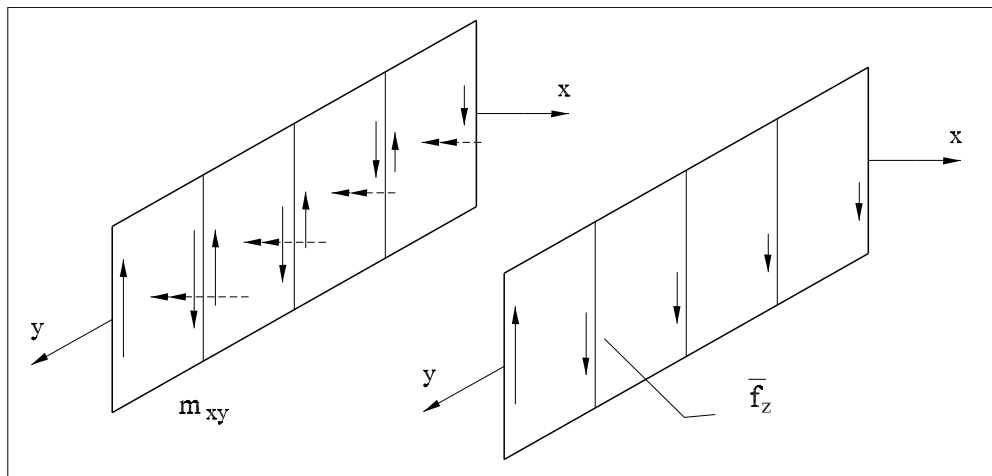


Figura 2.42: Equivalência estática ao longo do bordo III com momento torsor variável

As forças componentes dos binários variam agora de fatia para fatia. Assim, a resultante nas interfaces entre fatias deixa de ser nula, surgindo um conjunto de forças verticais distribuídas que é possível somar à distribuição de forças verticais correspondendo ao esforço transversal  $v_x$ .

À soma do esforço transversal  $v_x(x, y)$  com a distribuição de forças  $\bar{f}_z$  que resulta da passagem momentos torses-binário é usual chamar *esforço transversal efectivo*,  $r_x(x, y)$ . Define-se

$$r_x(x, y) = v_x(x, y) + \bar{f}_z \quad (2.69)$$

É em função dos esforços transversos efectivos que se impõe uma das condições de fronteira nos bordos livres. Para se poder determinar a expressão que define esta nova grandeza, é necessário obter a relação entre  $\bar{f}_z$  e a variação do campo de momentos torses que lhe dá origem. Considerem-se para o efeito duas fatias infinitesimais de lajes colocadas uma ao lado da outra.

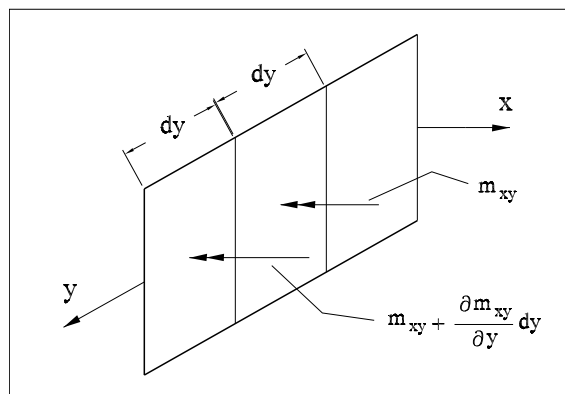


Figura 2.43: Variação do momento torsor entre fatias adjacentes

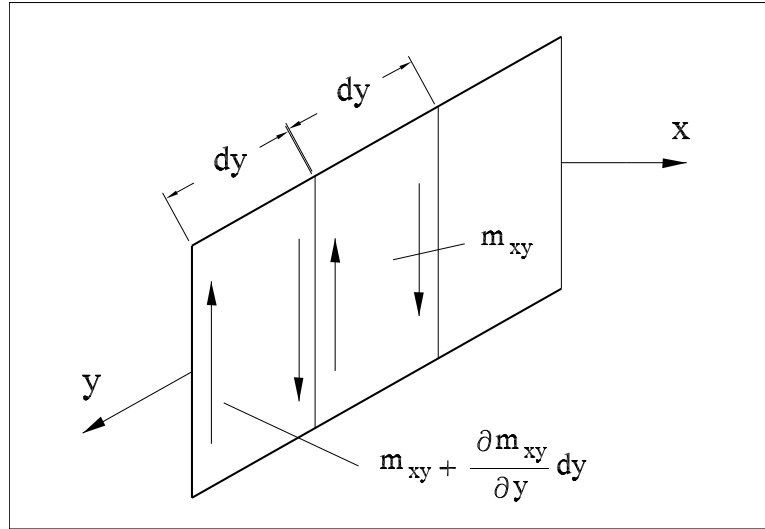


Figura 2.44: Determinação do valor de  $\bar{f}_z$

Na figura 2.43 representa-se a evolução de  $m_{xy}$  ao longo dessas duas fatias. Os correspondentes binários são obtidos tendo em conta (2.68), tal como se encontra representado na figura 2.44. Desta forma, na interface a resultante valerá

$$F_z = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$$

Se se distribuir esta força concentrada pelo comprimento da fatia, obtém-se finalmente

$$\bar{f}_z = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

Sendo assim, o esforço transversal efectivo  $r_x(x, y)$  será dado pela equação

$$r_x(x, y) = v_x(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.70)$$

A análise desta equação permite recuperar o comportamento discutido de forma mais intuitiva. Quando ao longo de bordo com normal exterior segundo  $x$  o momento torsor é constante,

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$$

o esforço transversal efectivo  $r_x$  é igual ao esforço transversal  $v_x$ . Quando esse momento torsor varia, ao campo  $v_x$  é necessário somar uma parcela adicional referente à “transformação” do momento torsor num conjunto de binários.

Tendo em conta a equação de equilíbrio (2.36), é possível escrever

$$r_x(x, y) = \left( \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.71)$$

Efectuando um raciocínio semelhante para os bordos com normal exterior segundo  $y$ , é possível verificar que o esforço transversal efectivo ao longo dessa direcção é dado por:

$$r_y(x, y) = v_y(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.72)$$

A equação de equilíbrio (2.37) permite agora escrever:

$$r_y(x, y) = \left( \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.73)$$

É importante ter sempre presente que ao longo da fronteira da laje a distribuição de esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  e o campo de momentos torsores  $m_{xy}(x, y)$  são estaticamente equivalentes às distribuições de esforços transversos efectivos,  $r_x(x, y)$  e  $r_y(x, y)$ , e às forças de canto. Esta equivalência encontra-se ilustrada na figura 2.45.

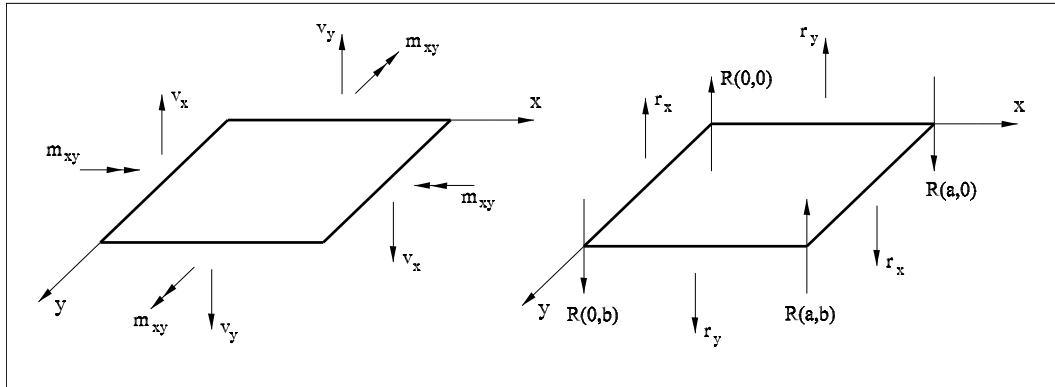


Figura 2.45: Equivalência estática na laje

Os valores das forças de canto continuam a ser dados pelas igualdades

$$\begin{aligned} |R(0, 0)| &= 2 |m_{xy}(0, 0)| & |R(0, b)| &= 2 |m_{xy}(0, b)| \\ |R(a, b)| &= 2 |m_{xy}(a, b)| & |R(a, 0)| &= 2 |m_{xy}(a, 0)| \end{aligned}$$

Como agora os momentos torsores podem tomar valores diferentes em cada canto, as reacções de canto também serão diferentes se tal vier a acontecer. Quanto ao sentido dessas forças, ele será o que se encontra indicado na figura 2.41 se o momento torsor no canto em causa for positivo. Se  $m_{xy}$  for negativo, torna-se necessário trocar o sentido à força correspondente.

A figura 2.46 resume as condições de fronteira a verificar em bordos livres. Nesta figura,  $n$  indica a direcção da normal exterior ao bordo livre;  $\bar{v}$  e  $\bar{m}$  são distribuições de forças verticais e momentos aplicadas directamente ao longo do bordo.

No caso da laje representada na figura 2.34, as condições de fronteira a verificar nos bordos II, III e IV, são as que se encontram indicadas na figura 2.47. Por simplicidade,

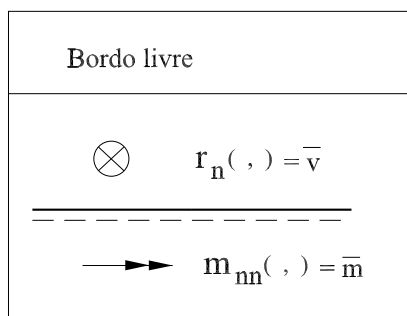


Figura 2.46: Condições de fronteira a verificar em bordos livres

considera-se que neste caso não existem cargas aplicadas nos bordos livres, pelo que  $\bar{m}_{II} = \bar{m}_{III} = \bar{m}_{IV} = \bar{v}_{II} = \bar{v}_{III} = \bar{v}_{IV} = 0$ .

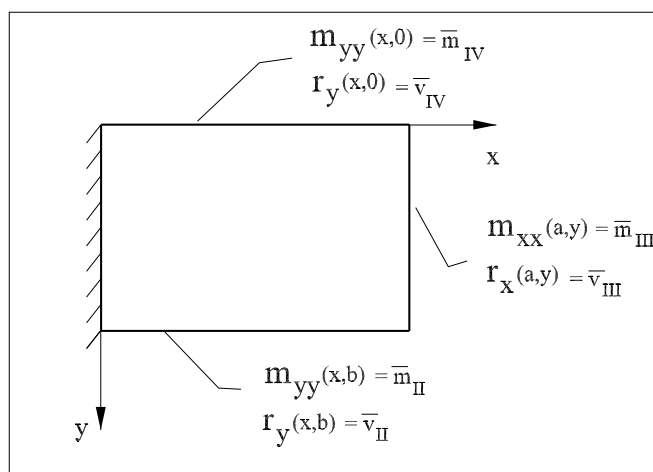


Figura 2.47: Condições de fronteira na laje da figura 2.34

É interessante verificar que a imposição da condição

$$r_x(a, y) = v_x(a, y) + \frac{\partial m_{xy}(a, y)}{\partial y} = 0$$

não implica necessariamente o anulamento dos campos de esforços  $v_x$  e  $m_{xy}$  ao longo desse bordo.

Por fim, as condições de fronteira a verificar nos cantos livres são  $R(a, 0) = 2m_{xy}(a, 0) = \bar{R}(a, 0)$  e  $R(a, b) = 2m_{xy}(a, b) = \bar{R}(a, b)$ , onde  $\bar{R}(a, 0)$  e  $\bar{R}(a, b)$  correspondem a forças directamente aplicadas nos respectivos cantos da laje. Por simplicidade, considera-se neste caso que não existem forças aplicadas nos cantos livres, pelo que  $\bar{R}(a, 0) = \bar{R}(a, b) = 0$ .

## 2.6 Identificação de soluções exactas

Um campo de deslocamentos transversais corresponde à solução exacta se:

1. No domínio se encontra verificada a equação de Lagrange, (A.10);
2. Na fronteira estão satisfeitas todas as condições de fronteira.

Na tabela 2.7 encontram-se sumarizadas estas condições.

SOLUÇÕES EXACTAS		
No domínio  $\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D_f}$		
Na fronteira		
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
$w = \bar{w}$ $\theta_n = \bar{\theta}_n$	$w = \bar{w}$ $m_{nn} = \bar{m}_{nn}$	$r_n = \bar{r}_n$ $m_{nn} = \bar{m}_{nn}$

Tabela 2.7: Condições para que uma solução possa ser considerada como exacta

---

### Problema 2.1

Considere-se a laje simplesmente apoiada representada na figura 2.48.

Para que a função

$$w(x, y) = \frac{1}{8D_f} (4 - x^2) (4 - y^2) \quad (2.74)$$

possa representar a *solução exacta* da laje, qual deverá ser o carregamento a aplicar no vão e nos bordos da laje?

#### Resolução

O campo de deslocamentos transversais fornecido encontra-se representado na figura 2.49. Os valores representados foram escalados na forma  $\bar{w} = -w \times D_f$ .

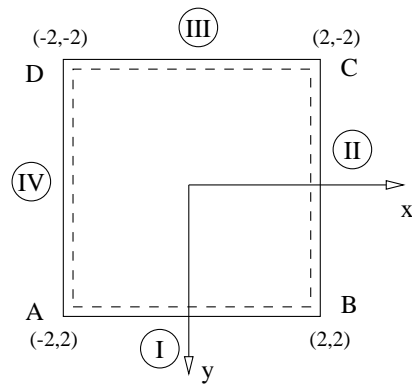


Figura 2.48: Definição da laje a analisar.

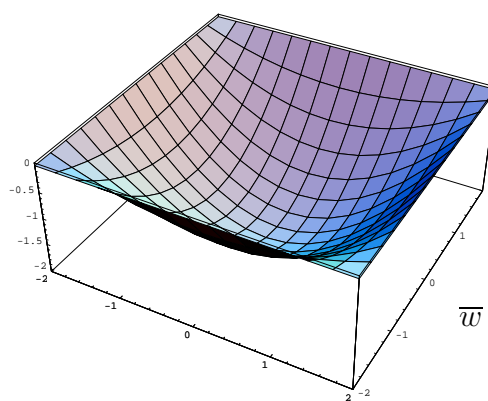


Figura 2.49: Campo de deslocamentos transversais

a) Verificação da equação de Lagrange

Derivando a solução (2.74), podem obter-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= -\frac{1}{4D_f} x(4 - y^2) , \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - x^2) y ; \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - y^2) , \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - x^2) , \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2D_f} x y ; \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} &= 0 , \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{2D_f} , \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} &= 0 ;\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação de Lagrange, obtém-se a condição:

$$0 + 2 \times \frac{1}{2D_f} + 0 = \frac{q}{D_f} \Rightarrow q = 1.0 \text{ kN/m}^2$$

Como conclusão, pode dizer-se que para que o campo de deslocamentos apresentado em (2.74) possa ser considerado como a solução exacta do problema, é necessário que esteja aplicada na laje uma carga uniformemente distribuída com valor unitário,  $q(x, y) = 1.0 \text{ kN/m}^2$ .

No entanto, ainda não se pode garantir que a equação dada corresponda *de facto* à solução do problema. Falta ainda averiguar se a solução verifica as diferentes condições de fronteira especificadas.

b) Verificação das condições de fronteira

Como todos os bordos da laje se encontram *simplesmente apoiados*, é preciso verificar se em todos eles o valor dos deslocamentos transversais e dos momentos flectores é nulo.

Nos bordos I e III a coordenada em  $y$  é constante e vale  $y = 2$  e  $y = -2$ , respectivamente.



Substituindo estas igualdades em (2.74), obtém-se para ambos os casos:

$$w(x, \pm 2) = \frac{1}{8D_f}(4 - x^2)(4 - 2^2) = 0 .$$

Para os bordos II e IV, onde se tem respectivamente que  $x = 2$  e  $x = -2$ , a situação é semelhante. De facto, verifica-se com facilidade que:

$$w(\pm 2, y) = \frac{1}{8D_f}(4 - 2^2)(4 - y^2) = 0 .$$

Ficam desta forma verificadas as condições de fronteira cinemáticas. Para se determinar o valor dos momentos flectores em cada um dos bordos da laje, é necessário determinar primeiro o campo de momentos através da aplicação das equações de compatibilidade e das relações constitutivas.

Utilizando a equação (2.59), os campos de momentos flectores,  $m_{xx}$  e  $m_{yy}$  resultam

$$m_{xx} = \frac{\nu(4 - x^2)}{4} + \frac{4 - y^2}{4} , \quad (2.75)$$

$$m_{yy} = \frac{4 - x^2}{4} + \frac{\nu(4 - y^2)}{4} . \quad (2.76)$$

Nos bordos II e IV verifica-se que

$$m_{xx} = 1 - y^2/4 ,$$

enquanto que nos bordos I e III se tem

$$m_{yy} = 1 - x^2/4 .$$

Em qualquer um dos casos, o campo de momentos flectores no bordo não é nulo. Conclui-se então que para que o campo de deslocamentos apresentado em (2.74) corresponda à solução do problema, é necessário que o carregamento seja constituído, não só pela carga unitária uniformemente distribuída, mas também por um conjunto de momentos flectores aplicados em cada um dos bordos da laje e cuja distribuição deve ter a seguinte expressão genérica:

$$m_{nn} = 1 - s^2/4 ,$$

onde  $s$  representa  $y\{x\}$  nos bordos II e IV {I e III}. O carregamento encontra-se representado na figura 2.50.

### c) Caracterização do comportamento da laje

O problema definido inicialmente encontra-se neste instante completamente resolvido. Apenas com o intuito de ilustrar algumas das relações e conceitos que usualmente surgem na análise de lajes finas, calculam-se de seguida os campos de rotações, os campos de curvaturas, os campos de esforços e as reacções de apoio.

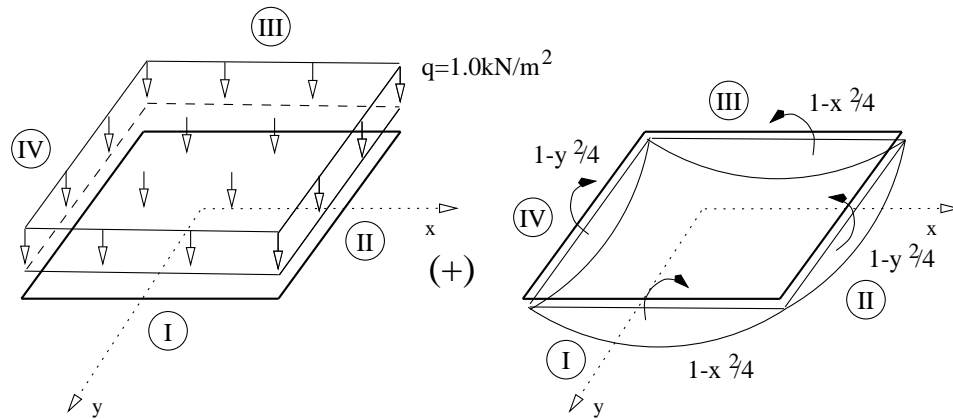


Figura 2.50: Cargas na laje simplesmente apoiada.

### c.1) Cálculo das rotações

Tendo em conta as derivadas apresentadas no ponto anterior, resulta de imediato que:

$$\theta_x = \frac{1}{4D_f} x (4 - y^2)$$

$$\theta_y = \frac{1}{4D_f} (4 - x^2) y$$

Os campos de rotações encontram-se representados na figura 2.51, na qual foi utilizado o factor de escala  $\bar{\theta}_i = \theta_i \times D_f$ .

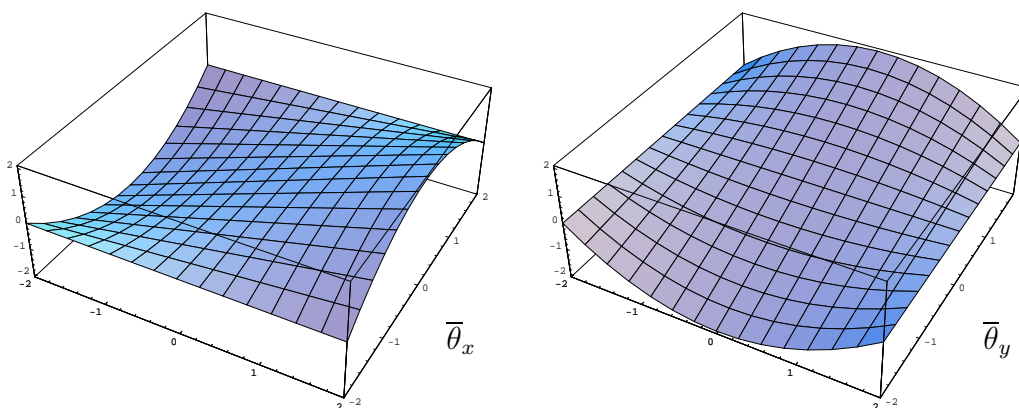


Figura 2.51: Campo de rotações

É interessante verificar agora qual a distribuição das rotações  $\theta_x$  ao longo dos bordos II e IV e das rotações  $\theta_y$  ao longo dos bordos I e III.

Não é difícil verificar que ao longo do lado II, para o qual se tem  $x = 2$ , o valor das rotações *normais* ao bordo são dadas por:

$$\theta_x = \frac{1}{2D_f} (2 - y^2) .$$

Verifica-se desta forma que o campo de rotações  $\theta_n$  toma valores diferentes de zero ao longo deste bordo, sendo nulo apenas nos pontos correspondentes aos *cantos* da laje. Comentários semelhantes podem ser efectuados para os restantes três bordos da laje.

Interessante é ainda verificar que para todos os cantos da laje se verifica que  $w = 0$ ,  $\theta_x = 0$  e  $\theta_y = 0$ . Isto faz com os vértices da laje se encontrem encastrados, efeito esse que é visível na deformada representada na figura 2.49.

### c.2) Cálculo das curvaturas

Os campos de curvaturas são determinados utilizando-se as condições de compatibilidade (2.13), (2.14 e (2.17)

$$\chi_{xx} = \frac{1}{4D_f} (4 - y^2)$$

$$\chi_{yy} = \frac{1}{4D_f} (4 - x^2)$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2D_f} x y$$

As curvaturas de flexão encontram-se representadas na figura 2.52, enquanto que o campo de curvaturas de torção se encontra representado na figura 2.53. Os valores estão normalizados na forma  $\bar{\chi}_{ii} = \chi_{ii} \times D_f$ .

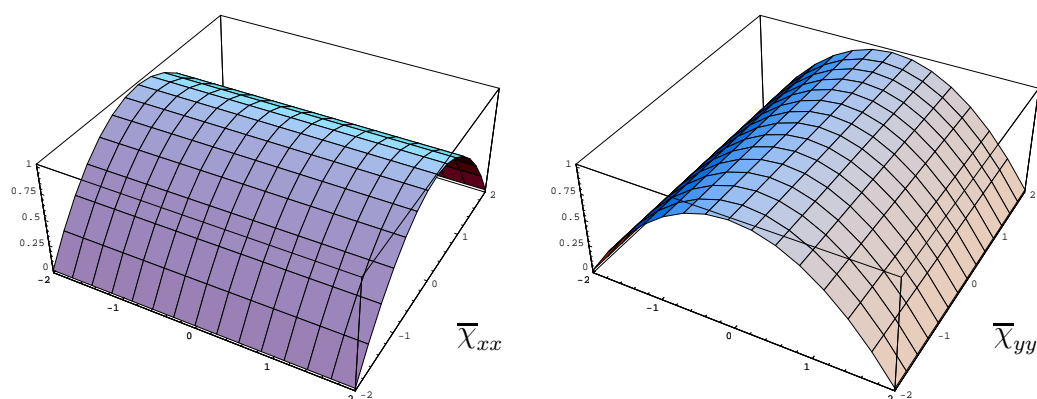


Figura 2.52: Campo de curvaturas de flexão.

### c.3) Cálculo dos momentos

Uma vez determinadas as deformações na laje, os campos de momentos são calculados aplicando as relações constitutivas (2.43). Os campos de momentos flectores,  $m_{xx}$  e  $m_{yy}$ ,

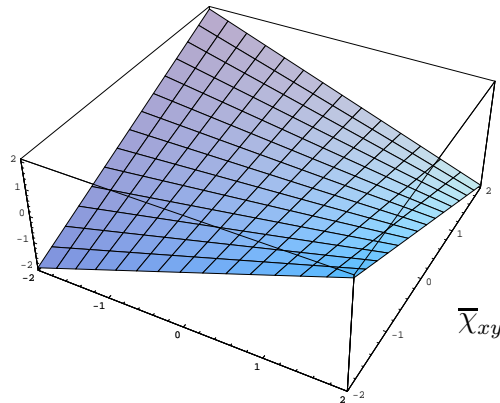


Figura 2.53: Campo de curvaturas de torção

são definidos pelas igualdades

$$m_{xx} = \frac{\nu (4 - x^2)}{4} + \frac{4 - y^2}{4} ,$$

$$m_{yy} = \frac{4 - x^2}{4} + \frac{\nu (4 - y^2)}{4} .$$

Os respectivos diagramas encontram-se representados na figura 2.54.

O campo de momentos torsores, representado na figura 2.55, tem a seguinte expressão:

$$m_{xy} = -\frac{(1 - \nu) x y}{2} . \quad (2.77)$$

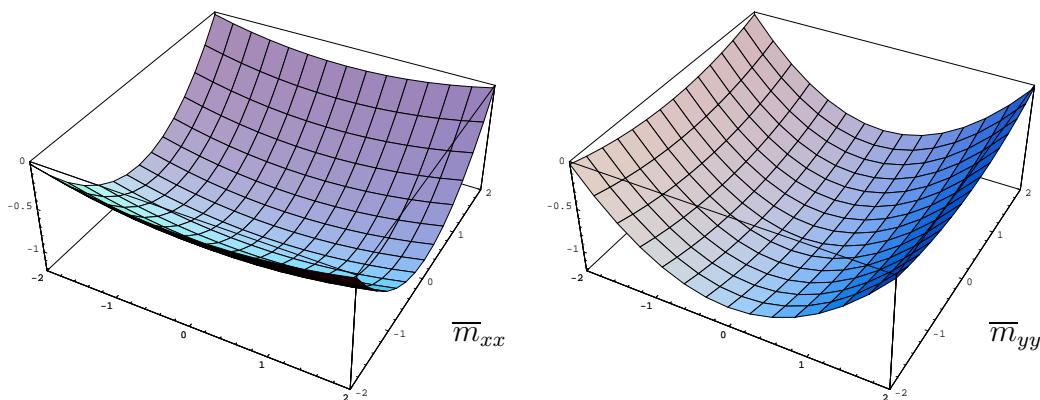


Figura 2.54: Campo de momentos flectores.

c.4) Cálculo dos esforços transversos

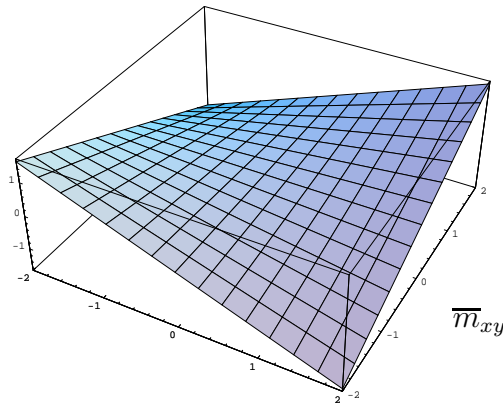


Figura 2.55: Campo de momentos torsores.

Os esforços transversos podem ser obtidos a partir das definições:

$$v_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y}$$

A substituição nas definições anteriores das expressões obtidas para os campos de momentos permite obter:

$$v_x = \frac{-(1-\nu)x}{2} - \frac{\nu x}{2} = -\frac{x}{2}$$

$$v_y = \frac{-(1-\nu)y}{2} - \frac{\nu y}{2} = -\frac{y}{2}$$

É possível verificar agora que o campo de esforços transversos verifica a equação de equilíbrio de forças transversais:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Os campos de esforços transversos encontram-se representados na figura 2.56.

c.5) Cálculo do esforço transversal efectivo e das forças de canto

Nos bordos perpendiculares ao eixo dos  $x$  (bordos II e IV) o esforço transversal efectivo é definido a partir da igualdade,

$$r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} .$$

Nos bordos I e III, perpendiculares ao eixo  $y$ , os esforços transversos efectivos são dados por:

$$r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} .$$

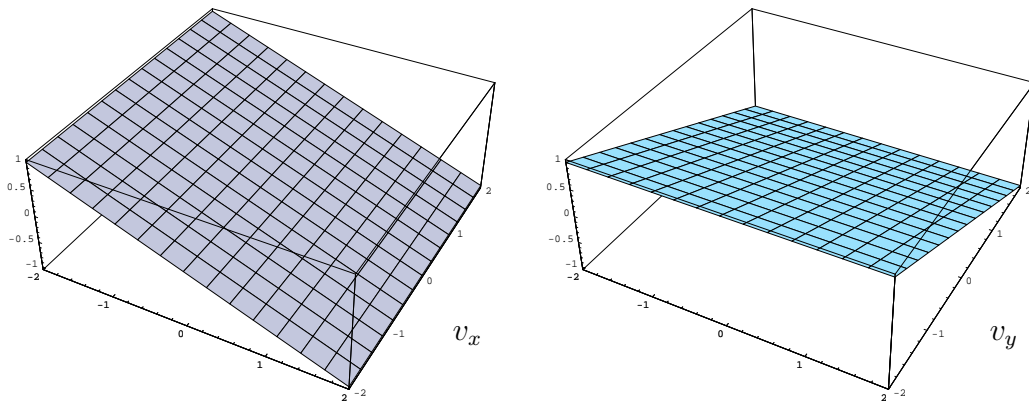


Figura 2.56: Campo de esforços transversos.

No bordo II, a definição anterior permite obter

$$r_x = -\frac{x}{2} - \frac{1-\nu}{2}x = \frac{x}{2}(-2 + \nu),$$

ou ainda, tendo em atenção que naquele lado  $x = 2$ ,

$$r_x = -2 + \nu.$$

A repetição deste cálculo para cada um dos restantes bordos da laje, permitirá verificar que o esforço transverso efectivo em cada um deles é constante. Pode verificar-se também que em qualquer um dos casos o valor absoluto do esforço transverso efectivo é o mesmo,  $|r_e| = 2 - \nu$ .

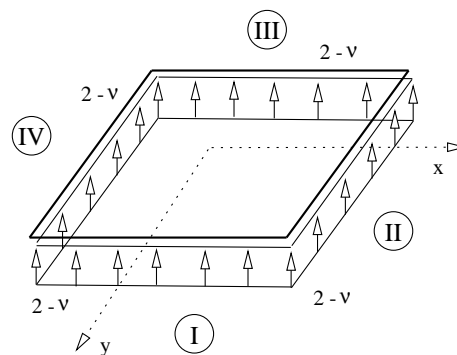


Figura 2.57: Distribuição dos esforços transversos efectivos nos bordos da laje.

Na figura 2.57 encontra-se representada a distribuição dos esforços transversos efectivos nos bordos da laje, esforços esses que podem ser vistos como correspondendo às *reações* de apoio no contorno da laje. É importante verificar que o sentido dessas reacções é sempre negativo (forças verticais aplicadas no sentido negativo do eixo  $z$ ).

A resultante dessas reacções é dada por:

$$R_{\bar{v}_e} = -4 \times \int_0^s (2 - \nu) ds = -4 \times 4 \times (2 - \nu) = -32 + 16\nu \text{ kN} .$$

Se se verificar que a resultante das cargas verticais aplicadas é dada por:

$$R_{apl} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 q(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 1.0 dx dy = 16.0 \text{ kN} ,$$

chega-se à estranha conclusão de que aparentemente não se encontra verificado o equilíbrio global em termos de forças verticais.

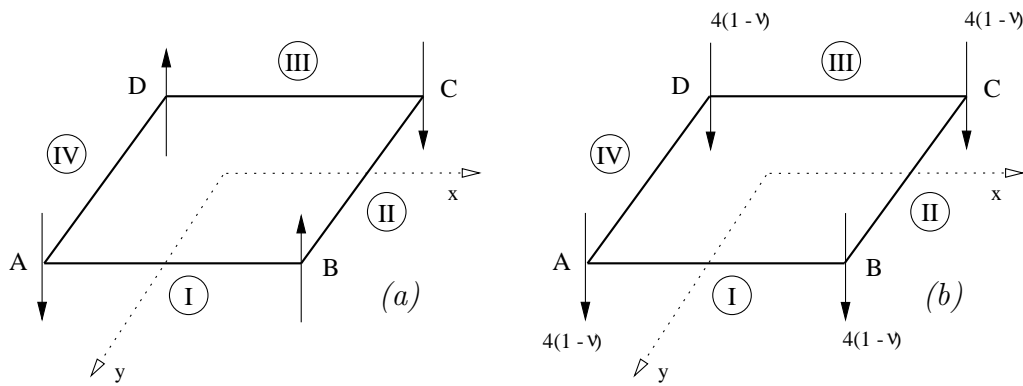


Figura 2.58: Reações de canto no elemento de laje.

Esta conclusão está de facto errada, uma vez que não foram ainda contabilizadas as forças que se desenvolvem nos cantos da laje. Se o valor do momento torsor for positivo em cada um dos cantos da laje, o sentido das forças verticais concentradas que aí surgem é o que se encontra indicado na figura 2.58 *a*). Como nos cantos B e D (ver figura 2.48) o valor do momento torsor é negativo, as reacções de canto que se desenvolvem na laje têm o sentido apresentado na figura 2.58 *b*).

O valor de cada força de canto é dado pela igualdade:

$$F_{canto} = 2 \times |m_{xy}| = 2 \times \frac{(1 - \nu)}{2} \times 2 \times 2 = 4 \times (1 - \nu) .$$

A resultante das forças de canto é dada então por:

$$R_{canto} = 4 \times 4 \times (1 - \nu) = 16 - 16\nu \text{ kN} .$$

Conclui-se então que o equilíbrio de forças verticais, envolvendo cargas aplicadas, esforços transversos efectivos e forças de canto é de facto verificado:

$$R_{\bar{v}_e} + R_{apl} + R_{canto} = -32 + 16\nu + 16 + 16 - 16\nu = 0 \text{ kN} .$$

## 2.7 Distribuições de esforços equilibradas

Para que uma dada distribuição de esforços possa ser considerada como equilibrada (ou estaticamente admissível) é necessário que:

1. No domínio se encontrem verificadas as condições de equilíbrio, (2.39);
2. Na fronteira estejam satisfeitas todas as condições que envolvem a especificação de uma qualquer componente dos campos de esforços.

Na tabela 2.8 encontram-se sumarizadas estas condições.

ESFORÇOS ESTATICAMENTE ADMISSÍVEIS		
No domínio  $\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$		
Na fronteira		
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
-	-	$r_n = \bar{r}_n$
-	$m_{nn} = \bar{m}_{nn}$	$m_{nn} = \bar{m}_{nn}$

Tabela 2.8: Condições para que uma distribuição de esforços seja estaticamente admissível

Várias são as questões que se podem colocar neste instante:

- Como identificar distribuições de esforços estaticamente admissíveis?
- Como “construir” distribuições de esforços equilibradas?
- Como verificar se uma dada distribuição de esforços que equilibra um carregamento corresponde à solução exacta para o problema?

A resposta à primeira destas perguntas corresponde à aplicação das verificações sumarizadas no diagrama da tabela 2.8. Já a resposta às duas questões seguintes não é tão imediata. Para facilitar a apresentação, os conceitos envolvidos na resposta a estas questões são apresentados e discutidos com base na resolução de problemas concretos.



### Problema 2.2

Considere-se a laje rectangular simplesmente apoiada representada na figura 2.59. Esta laje está sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída com valor unitário.

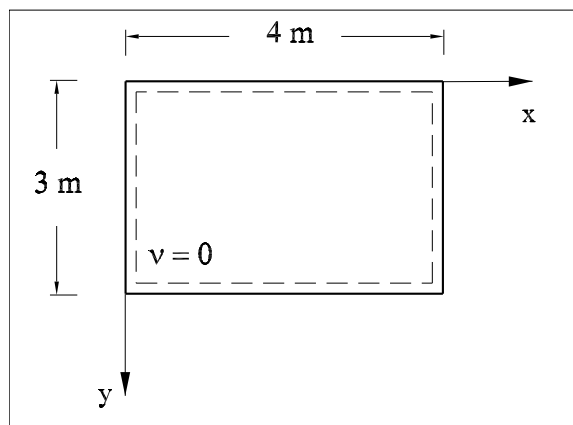


Figura 2.59: Laje rectangular simplesmente apoiada

a) Será que os campos de momentos

$$m_{xx}(x, y) = x - 0.25 x^2$$

$$m_{yy}(x, y) = 0.75 y - 0.25 y^2$$

$$m_{xy}(x, y) = 0$$

equilibram o carregamento?

b) Caso se trate de uma distribuição de esforços equilibrada, será também a solução exacta?

### Resolução

a) Para que a distribuição de esforços possa ser considerada como equilibrada, é necessário que:

1.

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

(condição no domínio)

2.

$$m_{xx}(0, y) = 0 \quad m_{xx}(4, y) = 0$$

$$m_{yy}(x, 0) = 0 \quad m_{yy}(x, 3) = 0$$

(condições de fronteira)

Dos dados do problema tira-se com facilidade

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} = -0.5$$

$$\frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} = -0.5$$

$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.0$$

pelo que a condição de equilíbrio no domínio (2.39)

$$(-0.5) + (-0.5) + 2(0) + 1.0 = 0$$

se encontra verificada. É também imediato verificar que as condições de fronteira estática também se encontram satisfeitas. Tendo em conta os campos de momentos dados, pode escrever-se,

$$m_{xx}(0, y) = 0 - 0.25 \times 0^2 = 0$$

$$m_{xx}(4, y) = 4 - 0.25 \times 4^2 = 0$$

$$m_{yy}(x, 0) = 0.75 \times 0 - 0.25 \times 0^2 = 0$$

$$m_{yy}(x, 3) = 0.75 \times 3 - 0.25 \times 3^2 = 0$$

como se pretendia verificar.

Conclui-se desta forma que a distribuição de esforços dada é estaticamente admissível (equilibra o carregamento dado). Mas será a distribuição de esforços exacta?

b) Uma análise das expressões dadas para os campos de esforços permite desde logo dizer que só muito dificilmente estes campos de momentos flectores e torsor serão os exactos. Isto porque não é de esperar que numa laje simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída os momentos torsores sejam nulos (o que seria então feito das forças de canto?). Também não é razoável que o campo de momentos  $m_{xx}$  só dependa da coordenada  $x$  enquanto que o campo de momentos  $m_{yy}$  dependa apenas da variável  $y$ .

Trata-se então de uma distribuição de esforços equilibrada, mas que não corresponde à solução exacta. Saliente-se desde já que a laje, como estrutura “hiperestática” que é, permite que se construa uma infinidade de soluções equilibradas. De entre todas as soluções equilibradas possíveis, haverá uma que corresponde à solução exacta, mas a sua obtenção é, regra geral, bem difícil.

Como se pode demonstrar que a solução equilibrada obtida não é de facto a solução exacta? Se o fosse, os campos de esforços dados deveriam dar origem a um campo de curvaturas

(aplicando as relações de elasticidade) que por sua vez deveriam permitir a obtenção de um campo de deslocamentos transversais (aplicando as condições de compatibilidade) que respeitasse todas as condições de fronteira cinemática.

Será que a obtenção de um campo de deslocamentos que respeite estas condições é possível neste caso? Para responder a esta questão, comecemos por calcular as curvaturas de flexão  $\chi_{xx}$  associadas aos campos de esforços dadas. Como se assume que  $\nu = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(x, y) &= \frac{1}{D_f} m_{xx}(x, y) \\ \chi_{xx}(x, y) &= \frac{1}{D_f} (x - 0.25 x^2)\end{aligned}$$

Será agora possível determinar um campo de deslocamentos que respeite todas as condições de fronteira

$$w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0$$

e que respeite a condição de compatibilidade

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

A resposta é de imediato negativa se se tiver em conta que

$$w(x, 0) = 0 \Rightarrow \chi_{xx}(x, 0) = 0$$

ou seja, a satisfação das condições de fronteira e da condição de compatibilidade impõe que seja nulo o campo de curvaturas de flexão ao longo da fronteira  $y = 0$ . Ora, do campo de curvaturas obtido a partir do campo de momentos dado vem

$$\chi_{xx}(x, 0) = \frac{1}{D_f} (x - 0.25 x^2) \neq 0$$

pelo que a solução não é a exacta, como queríamos demonstrar.

A obtenção de soluções equilibradas desempenha um papel muito importante na análise de lajes, uma vez que a determinação de soluções exactas ou é bem complicada, ou de todo impossível. Tendo em conta o teorema estático da análise plástica limite, o dimensionamento efectuado com base em distribuições de esforços equilibrados está sempre do lado da segurança.

A segunda das perguntas enunciadas logo no início desta secção é então a que de um ponto de vista prático maior importância tem. Como construir/obter distribuições de esforços equilibrados?

A análise dos campos de esforços do problema anterior permite-nos ter uma ideia de como essa construção poderá ser efectuada. Para começar, é importante verificar que se

assume logo à partida que  $m_{xy}(x, y) = 0$ . Isto corresponde a afirmar que o carregamento é equilibrado apenas com recurso a momentos flectores.

Qual é o diagrama de  $m_{xx}$  e de  $m_{yy}$ ? Tendo em conta as expressões fornecidas, obtêm-se os diagramas representados na figura 2.60

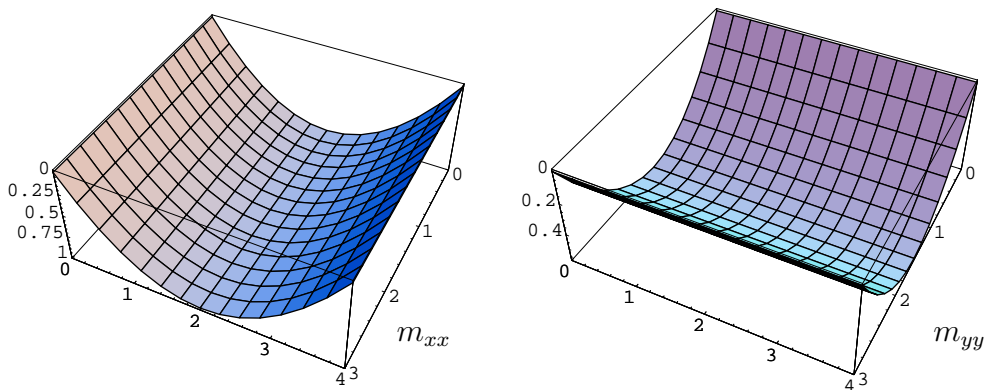


Figura 2.60: Diagramas de momentos  $m_{xx}$  e  $m_{yy}$

É possível verificar que  $m_{xx}(x, y)$  corresponde ao diagrama de momentos flectores que se obtém da análise da viga representada na figura 2.61. Esta viga tem um comprimento igual à dimensão da laje segundo essa direcção e as condições de apoio nos nós inicial e final reflectem o que se passa nos bordos  $x = 0$  e  $x = 4$ . Tratando-se de bordos simplesmente apoiados, também os nós extremos do elemento de viga considerado devem ter o mesmo apoio. Está aplicada uma carga uniformemente distribuída  $q_x = 0.5$ .

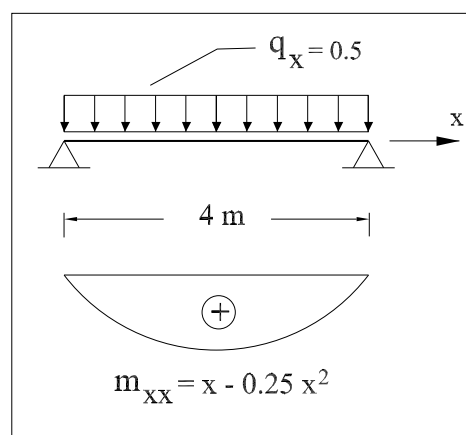


Figura 2.61: Viga para obtenção de  $m_{xx}$

O campo de momentos  $m_{yy}(x, y)$  pode agora ser determinado com base na análise de um elemento de viga com a direcção do eixo  $y$  e com um comprimento de três metros. Tendo

em conta as condições de apoio existentes em  $y = 0$  e  $y = 3$ , a viga a utilizar é a que se encontra representada na figura 2.62.

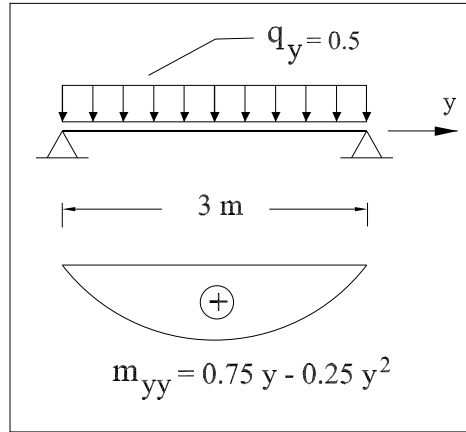


Figura 2.62: Viga para obtenção de  $m_{yy}$

Para se garantir a obtenção de uma distribuição de esforços equilibrada, é necessário garantir que

$$q(x, y) = q_x(x, y) + q_y(x, y) \quad (2.78)$$

ou seja, que a soma da parcela da carga a equilibrar na direcção  $x$ ,  $q_x$ , com a parcela da carga a equilibrar na direcção  $y$ ,  $q_y$ , seja igual à carga distribuída total,  $q(x, y)$ .

Neste problema tem-se  $q_x = 0.5$  e  $q_y = 0.5$ . No entanto, qualquer outra repartição de cargas, desde que satisfazendo a condição (2.78), permite obter uma distribuição de esforços que equilibre o carregamento. No limite, pode considerar-se que  $q_x = q$  e  $q_y = 0$  ou  $q_x = 0$  e  $q_y = q$ . Esta última repartição de cargas permite simplificar a obtenção de diagramas equilibrados, mas os campos obtidos, embora se encontrem do lado da segurança, podem afastar-se significativamente do comportamento real da estrutura.

Esta forma de “construir” distribuições de esforços estaticamente admissíveis em lajes rectangulares de dimensões  $(a \times b)$  encontra-se sumarizada na tabela 2.9.

Para validar este processo, basta verificar que com a repartição de cargas assumida em (2.78) e considerando  $m_{xy} = 0$ , se pode escrever

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + q_x + q_y = 0$$

Ora o passo 3 permite obter um campo de momentos que satisfaz

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + q_x = 0$$

e o passo 4 permite a verificação da condição

$$\frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + q_y = 0$$

## OBTENÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES DE ESFORÇOS EQUILIBRADAS

1. Arbitrar  $m_{xy}(x, y) = 0$
2. Repartir o carregamento em duas direcções, considerando sempre  $q(x, y) = q_x(x, y) + q_y(x, y)$
3. Determinar o campo  $m_{xx}(x, y)$  através da determinação de um campo de momentos que equilibre a carga  $q_x$  numa viga com a direcção  $x$ , comprimento  $L = a$ , e com as condições de apoio ditadas pelas condições de fronteira da laje nos bordos  $x = 0$  e  $x = a$ .
4. Determinar o campo  $m_{yy}(x, y)$  através da determinação de um campo de momentos que equilibre a carga  $q_y$  numa viga com a direcção  $y$ , comprimento  $L = b$ , e com as condições de apoio ditadas pelas condições de fronteira da laje nos bordos  $y = 0$  e  $y = b$ .

Tabela 2.9: Construção de soluções estaticamente admissíveis

Como consequência, a equação de equilíbrio no domínio é verificada. As condições de fronteira estática estão também satisfeitas porque se consideraram nas vigas utilizadas na construção do campo de momentos os apoios correspondentes aos que existem nos bordos da laje.

**Problema 2.3**

Considere a laje representada na figura 2.63. Tendo em conta que a laje está subme-

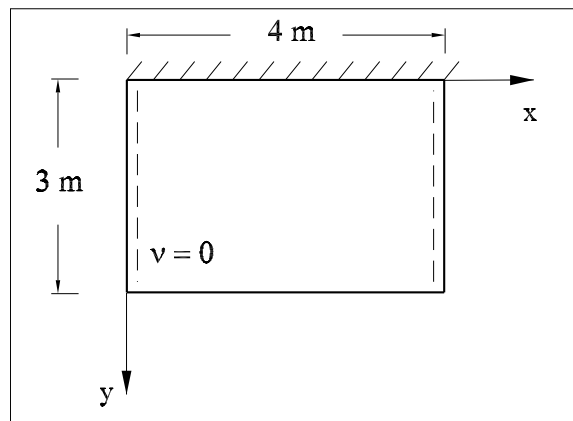


Figura 2.63: Laje rectangular com tipos de apoios diferentes

tida à acção de uma carga uniformemente distribuída com valor unitário, obtenha uma distribuição de esforços que equilibre o carregamento.

### Resolução

Aplicando um procedimento semelhante ao que foi descrito atrás, poder-se-á construir a distribuição de esforços pretendida. Desta forma, começa-se por considerar  $m_{xy} = 0$ . Os campos de momentos flectores são obtidos considerando o equilíbrio dos elementos de viga representados na figura 2.64.

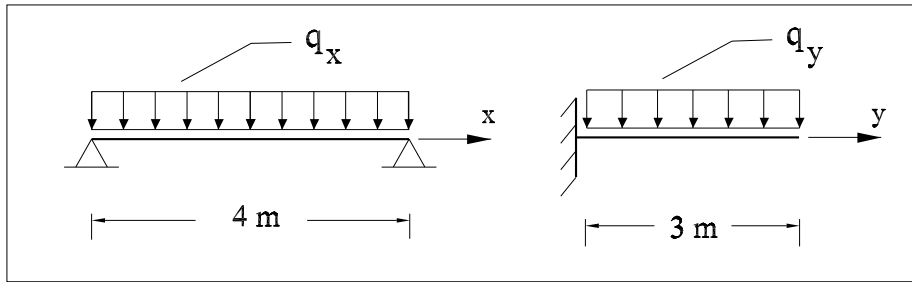


Figura 2.64: Elementos de viga para a determinação dos campos de momentos flectores

Determinando as reacções nos apoios e considerando o equilíbrio do corpo livre obtido cortando a viga numa secção genérica de coordenada  $x$  ou  $y$ , respectivamente, obtém-se:

$$m_{xx}(x, y) = \frac{q_x}{2} (4x - x^2)$$

$$m_{yy}(x, y) = q_y \left( 3y - \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} \right)$$

Para que esta distribuição seja estaticamente admissível, só falta impor que  $q_x + q_y = q$ .

É fácil verificar agora que a distribuição de esforços obtida é equilibrada. Estão satisfeitas a condição de equilíbrio no domínio e todas as condições de fronteira estáticas. De facto,

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = -q_x - q_y + q = 0$$

Na fronteira tem-se:

$$m_{xx}(0, y) = \frac{q_x}{2} (0 - 0) = 0$$

$$m_{xx}(4, y) = \frac{q_x}{2} (4 \times 4 - 4^2) = 0$$

$$m_{yy}(x, 3) = q_y \left( 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) = 0$$

$$r_y(x, 3) = \left( \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=3} = q_y \left( 3 - \frac{2y}{2} \right)_{y=3} = 0$$

---

Embora seja o mais simples quando os apoios permitem considerar  $m_{xy} = 0$ , é importante reforçar que este método de construção não é o único que permite a obtenção de diagramas de esforços estaticamente admissíveis. Um processo alternativo poderá passar pela consideração e tratamento directo das condições indicadas no quadro 2.8, o que é necessário quando se considera  $m_{xy} \neq 0$ .

---

### Problema 2.4

Considere-se de novo a laje representada na figura 2.63. Será possível equilibrar o carregamento considerando agora que  $m_{xx}(x, y) = m_{yy}(x, y) = 0$ ?

#### Resolução

Pretende-se verificar se é possível equilibrar na laje em estudo uma carga uniformemente distribuída com recurso apenas a um campo de momentos torsores. Para que a equação de equilíbrio no domínio venha satisfeita, é necessário considerar que

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + 1.0 = 0$$

o que implica

$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{xy} = -\frac{1}{2} x y + f(x) + g(y)$$

Qualquer que sejam as funções  $f(x)$  e  $g(y)$ , o campo de momentos torsores assim determinado permite verificar a condição de equilíbrio no domínio.

O que se passa agora com as condições de fronteira? Tendo em conta que à partida se considerou  $m_{xx}(x, y) = m_{yy}(x, y) = 0$ , apenas falta tratar a condição  $r_y(x, 3) = 0$ .

Como  $m_{yy}(x, y) = 0$ , esforço transversal efectivo  $r_y(x, y)$  pode ser calculado através da igualdade:

$$r_y(x, y) = 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

Obtém-se então

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{x y}{2} + f(x) + g(y) \right]_{y=3} &= 0 \\ 2 \left[ -\frac{y}{2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{y=3} &= 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} x + C \end{aligned}$$



A carga uniformemente distribuída pode ser então equilibrada pelo seguinte campo de esforços:

$$\begin{aligned}m_{xx}(x, y) &= 0 \\m_{yy}(x, y) &= 0 \\m_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}x\end{aligned}$$

Verifique-se agora se o campo de esforços construído desta forma corresponde à solução exacta para o problema. Mais uma vez a resposta intuitiva é imediata, se se tiver em consideração que fisicamente não faz sentido serem nulas as duas distribuições de momentos flectores.

É no entanto necessário demonstrar formalmente que a distribuição de esforços obtida é apenas equilibrada. Se fosse exacta, os campos de curvaturas associados ao campo de esforços deveriam permitir a obtenção de um campo de deslocamentos transversais (através da aplicação das condições de compatibilidade) que respeitasse ainda todas as condições de fronteira cinemática.

Tendo em conta que se considera  $\nu = 0$ , os campos de curvaturas associados ao campo de esforços anteriormente construído são dadas pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(x, y) &= 0 \\ \chi_{yy}(x, y) &= 0 \\ \chi_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2D_f}(-xy + 3x)\end{aligned}$$

Para que possam corresponder à solução exacta, estas curvaturas devem poder ser obtidas a partir de um campo de deslocamentos transversais que satisfaça todas as condições de compatibilidade (tanto no domínio quanto na fronteira).

Tal como referido na resolução da alínea b) do Problema 2.2, a verificação das condições de fronteira implica que:

$$\begin{aligned}w(x, 0) = 0 &\Rightarrow \chi_{xx}(x, 0) = 0 \\ w(0, y) = 0 &\Rightarrow \chi_{yy}(0, y) = 0 \\ w(4, y) = 0 &\Rightarrow \chi_{yy}(4, y) = 0\end{aligned}$$

O campo de curvaturas acima obtido permite verificar de imediato este conjunto de condições. Será então possível dizer-se que a solução é exacta? A resposta a esta pergunta tem de ter em consideração que há ainda equações de compatibilidade por verificar. Nomeadamente, falta ainda averiguar se estes campos satisfazem as condições de compatibilidade no domínio. Por outras palavras, pode dizer-se que falta ainda discutir se existe um campo de deslocamentos transversais que permita recuperar, através da aplicação das

condições de compatibilidade no domínio, os campos de curvaturas acima indicados. Será pois um erro grosseiro afirmar desde já que a solução obtida corresponde à exacta.

Para que um conjunto curvaturas possa ser compatível, é necessário que se verifiquem as condições seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\chi_{xx}(x, y)) - \frac{\partial}{\partial x} (\chi_{xy}(x, y)) = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\chi_{yy}(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (\chi_{xy}(x, y)) = 0 \quad (2.80)$$

Para recuperar as condições (2.79) e (2.80) basta ter em conta as definições (2.13), (2.14) e (2.17).

Substituindo agora em (2.79) as curvaturas em questão obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} (0) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2D_f} (-xy + 3x) \right) = 0 + \frac{1}{2D_f} (y - 3) \neq 0$$

A não verificação da condição (2.79) permite desde logo afirmar que os campos de curvaturas apresentados não são compatíveis, pelo que o campo de esforços equilibrado acima construído não corresponde à solução exacta.

Embora tal não fosse já necessário, é possível averiguar se a condição (2.80) se encontra satisfeita. Resulta de imediato que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2D_f} (-xy + 3x) \right) = 0 + \frac{1}{2D_f} (x) \neq 0$$

## 2.8 Campos de deslocamentos compatíveis

Para que um determinado campos de deslocamentos possa ser considerado como compatível (ou cinematicamente admissível), é necessário que

1. No domínio se encontrem verificadas as condições de compatibilidade, (2.13), (2.14) e (2.17);
2. Na fronteira se encontrem satisfeitas todas as condições que envolvem a especificação de um qualquer campo de deslocamentos.

Na tabela 2.10 encontram-se sumarizadas estas condições.

De novo, podem desde já colocar-se as seguintes questões:

CAMPOS DE DESLOCAMENTOS COMPATÍVEIS		
No domínio		
$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$		
$\chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$		
$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$		
Na fronteira		
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	-
$\theta_n = \bar{\theta}_n$	-	-

Tabela 2.10: Condições para que o campo de deslocamentos seja cinematicamente admissível

- Como identificar campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis?
- Como construir campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis?
- Como verificar se um dado campos de deslocamentos compatível corresponde também à solução exacta do problema?

À semelhança do que se passa nas soluções equilibradas, também neste caso é possível obter uma infinidade de campos de deslocamentos transversais que satisfaçam as condições de compatibilidade. No entanto, o interesse prático deste exercício já não é tão relevante quanto o era no caso das distribuições de esforços equilibradas. Isto porque tendo em conta o teorema cinemático da análise plástica, campos de deslocamentos compatíveis fornecem soluções contra a segurança.

Tal como na secção anterior, os conceitos serão apresentados através da resolução de problemas.

### Problema 2.5

Considere-se de novo a laje representada na figura 2.59

a) Será que o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = (4x - x^2)(3y - y^2)$$

é compatível?

b) Caso se trate de uma solução compatível, será também o campo de deslocamentos exacto?

#### Resolução

a) Para que o campo de deslocamentos possa ser considerado como compatível, é necessário que

1.

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad \chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad \chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

(condição no domínio)

2.

$$w(0, y) = 0 \quad w(4, y) = 0$$

$$w(x, 0) = 0 \quad w(x, 3) = 0$$

(condições de fronteira)

As condições de compatibilidade no domínio impõem apenas que o campo de deslocamentos fornecido permita a determinação dos campos de curvaturas  $\chi_{xx}$ ,  $\chi_{yy}$  e  $\chi_{xy}$ . De uma forma pouco rigorosa, poder-se-à dizer que as condições no domínio impõem apenas que as segundas derivadas envolvidas nas equações (2.13), (2.14) e (2.17) se possam determinar. Para que tal aconteça, é necessário que a função de deslocamentos dada seja contínua e apresente primeiras derivadas contínuas.

Como no caso em estudo o campo de deslocamentos é dado por uma função polinomial, as condições anteriores resultam satisfeitas de forma imediata. Os campos de curvaturas induzidos pelo campo de deslocamentos são assim dados por

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(x, y) &= 2(3y - y^2) \\ \chi_{yy}(x, y) &= 2(4x - x^2) \\ \chi_{xy}(x, y) &= -(4 - 2x)(3 - 2y)\end{aligned}$$

Também é fácil verificar que:

$$\begin{aligned}w(0, y) &= (0 - 0^2)(3y - y^2) = 0 \\ w(4, y) &= (4 \times 4 - 4^2)(3y - y^2) = 0 \\ w(x, 3) &= (4x - x^2)(0 - 0^2) = 0 \\ w(x, 3) &= (4x - x^2)(3 \times 3 - 3^2) = 0\end{aligned}$$

o que permite concluir de imediato que o campo de deslocamentos é de facto compatível.

b) A solução será exacta se o campo de deslocamentos satisfizer todas as condições expressas no diagrama da tabela 2.10. Tendo em conta que  $\nu = 0$ , obtém-se

$$m_{xx}(x, y) = D_f \chi_{xx} = 2 D_f (3y - y^2)$$

o que permite verificar

$$m_{xx}(0, y) = 2 D_f (3y - y^2) \neq 0$$

o que por sua vez implica que a solução não pode ser considerada como exacta, uma vez que uma das condições de fronteira não se encontra verificada.

### Problema 2.6

Considere-se de novo a figura representada na figura 2.63. Pretende-se construir um campo de deslocamentos que satisfaça as condições de compatibilidade.

#### Resolução

Para se construir um campo de deslocamentos compatível, é necessário garantir a verificação de um conjunto de condições no domínio e na fronteira.

Se se utilizar uma função polinomial para definir o campo de deslocamentos transversais em todo o domínio da laje, as condições de compatibilidade no domínio vêm automaticamente verificadas. Isto acontece porque as funções assim construídas são contínuas e apresentam primeiras derivadas contínuas, permitindo sempre a definição dos campos de curvaturas.

Fica desta forma a faltar apenas a verificação das condições de fronteira. Um processo simples para efectuar a construção pretendida passa pela utilização da seguinte função:

$$w(x, y) = f_1(x) \times f_2(x) \times g_1(y) \times g_2(y) \quad (2.81)$$

Em (2.81),  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  representam polinómios que permitem satisfazer as condições de fronteira cinemática nas fronteiras  $x = 0$  e  $x = a$ . Do mesmo modo, os polinómios  $g_1(y)$  e  $g_2(y)$  verificam as condições de admissibilidade cinemática nas fronteiras  $y = 0$  e  $y = b$ .

Se cada uma das funções  $f_i(x)$  e  $g_j(y)$  verifica as condições de fronteira cinemática em cada troço da fronteira da laje, o seu produto, definido em (2.81), permite assegurar a verificação simultânea de todas as condições de admissibilidade cinemática na fronteira.

Na laje em estudo, as condições de fronteira cinemática a considerar são as seguintes:

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0, \text{ em } x = 0 \\ w(4, y) &= 0, \text{ em } x = 4 \\ w(x, 0) &= 0 \text{ e } \theta_y(x, 0) = 0, \text{ em } y = 0 \end{aligned}$$

Quais as funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  a considerar? Ou seja, quais os polinómios que permitem garantir as condições  $w(x, y) = 0$ , para  $x = 0$  e para  $x = 4$ ? É fácil verificar que os polinómios pretendidos são dados pelas igualdades:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

Dado que no bordo  $y = 3$  não há qualquer condição de fronteira cinemática a verificar (trata-se de um bordo livre), a função  $g_2(y)$  pode ser retirada do produto definido na equação 2.81. Desta forma, fica apenas a faltar a definição da função  $g_1(y)$ .

A consideração de  $g_1(y) = y$  permite verificar de imediato a condição  $w(x, 0) = 0$ . No entanto, a segunda das condições,  $\theta_y(x, 0) = 0$ , não vem verificada. Desta forma (e sempre que surjam bordos encastrados), é necessário utilizar-se um polinómio que se anule ao longo do bordo considerado, mas que tenha também derivada nula. Não é difícil de verificar neste caso que a função  $g_2(y) = y^2$  satisfaz estas condições.

Recorrendo agora à definição (2.81), é possível escrever o seguinte campo de deslocamentos compatíveis para a laje:

$$w(x, y) = x(x - 4)y^2$$

É importante ter em conta que a utilização de funções polinomiais não é condição necessária para que se possam construir campos de deslocamentos compatíveis. Muitos

outros tipos de funções poderiam ser utilizadas. Trata-se, no entanto, do procedimento mais simples.

Considere-se agora um procedimento alternativo (um pouco mais formal) para se resolver este mesmo problema. Para tal, considerem-se de novo as vigas equivalentes utilizadas na construção de distribuições de esforços estaticamente admissíveis.

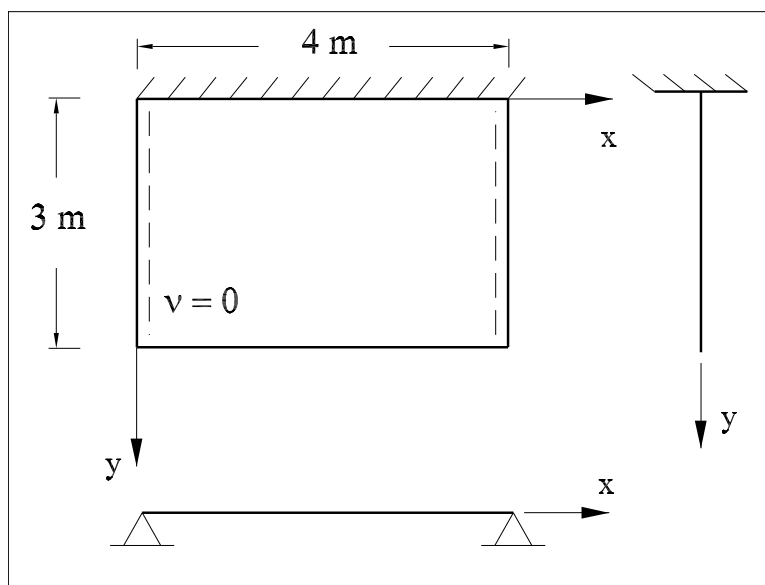


Figura 2.65: Vigas equivalentes

Se se obtiverem campos de deslocamentos compatíveis nas vigas representadas na figura 2.65, a função

$$w(x, y) = w_1(x) \times w_2(y) \quad (2.82)$$

corresponde a um campo de deslocamentos transversais que garantidamente satisfaz as condições de compatibilidade na laje.

Como construir as funções  $w_1(x)$  e  $w_2(y)$ ? Começemos pela primeira. Pretende-se determinar uma função de classe  $C^1$  (função contínua com primeira derivada contínua), para que a existência de segundas derivadas e por consequência a satisfação de compatibilidade no domínio possam ser garantidas à partida. O tipo de função mais simples será uma função do tipo polinomial.

Deve impor-se ainda que a função  $w_1(x)$  satisfaça as condições de fronteira  $w_1(0) = w_1(4) = 0$ . Para satisfazer estas duas condições e apresentar um valor diferente de zero ao longo de  $x$ , o campo de deslocamentos, se for considerado como polinomial, deverá ter pelo menos grau dois. Terá então a seguinte forma geral:

$$w_1(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Impondo as condições de fronteira obtém-se sucessivamente,

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$w_1(4) = 0 \Rightarrow 16 c_1 + 4 c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -4 c_1$$

O campo de deslocamentos pretendido será então da forma

$$w_1(x) = c_1 x^2 - 4 c_1 x$$

Qualquer que seja o valor considerado para  $c_1$ , o campo de deslocamentos na viga é compatível. Por simplicidade, considera-se que  $c_1 = 1.0$ .

Na direcção  $y$ ,  $w_2(y)$  poderá ser uma função polinomial que satisfaça as condições  $w_2(0) = 0$  e  $\theta(0) = -\partial w_2(0)/\partial y = 0$ . A imposição de duas condições implica que de novo o polinómio a utilizar seja pelo menos do segundo grau. Pode então escrever-se:

$$w_2(y) = d_1 y^2 + d_2 y + d_3$$

Tendo em conta as condições de fronteira, conclui-se que

$$w_2(0) = 0 \Rightarrow d_3 = 0$$

$$\theta(0) = -\partial w_2(0)/\partial y = 0 \Rightarrow -2 d_1 \times 0 + -d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

O campo pretendido terá a forma geral

$$w_2(y) = d_1 y^2$$

Considera-se de novo  $d_1=1.0$

De (2.82), resulta que o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = w_1(x) \times w_2(y) = x(x - 4) y^2$$

é um campo de deslocamentos compatível na laje. É também possível verificar que este campo de deslocamentos não é exacto.

---





# Capítulo 3

## Análise elástica de lajes finas

No capítulo anterior descreveu-se, com a profundidade possível para um curso de introdução à análise de lajes, a teoria de Kirchhoff para a análise de lajes finas. Este capítulo dedicar-se-á à aplicação dessa formulação a casos correntes de lajes. De entre esses casos o mais simples é o de uma laje rectangular sob flexão cilíndrica. Como introdução a este tipo de lajes são recuperados os conceitos básicos da análise de vigas à flexão e é feita uma comparação, sob o ponto de vista estrutural, do comportamento das vigas e das lajes.

### 3.1 Flexão de vigas

A equação diferencial da elástica (a equação que define a deformada assumindo comportamento elástico linear) de uma viga submetida a uma carga  $p(x)$  é, admitindo que o eixo da viga se encontra alinhado com o eixo  $x$ ,

$$EI_{yy} \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x), \quad (3.1)$$

sendo o momento flector dado por:

$$-EI_{yy} \frac{d^2 w}{dx^2} = m_{xx}(x), \quad (3.2)$$

em que  $EI_{yy}$  é a rigidez de flexão da viga e o termo às derivadas parciais do deslocamento transversal representa a curvatura, Figura 3.1.

Esta equação assume que as secções transversais se mantêm planas e ortogonais ao eixo da peça linear após a deformação (hipótese de Bernoulli). De notar as semelhanças com as hipóteses de Kirchhoff.

Daqui resulta que, para uma dada secção transversal e para momento flector positivo, a deformação das fibras longitudinais na face superior é  $-\epsilon$  sendo de  $\epsilon$  nas fibras da face

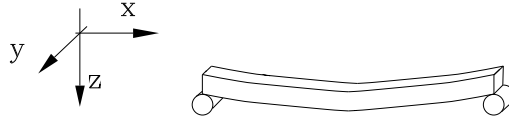


Figura 3.1: Deformada de uma viga.

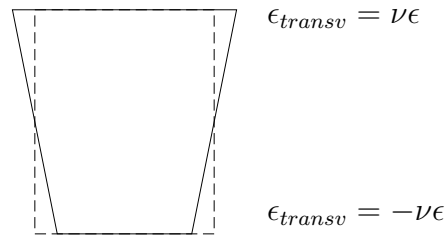


Figura 3.2: Deformada da secção transversal de uma viga.

inferior. Esta deformação implica, por efeito de Poisson, que se desenvolvam deformações transversais que são positivas na face superior e negativas na face inferior.

Não havendo restrições a essa deformação transversal não se desenvolvem tensões transversais.

Admita-se agora que a secção transversal da viga é rectangular. Se alinharmos uma série de vigas com os eixos paralelos entre si como que a formar uma laje (quer dizer, sem espaços vazios entre vigas) pode dizer-se que as deformações transversais estão restringidas (devem ser nulas para que se mantenha a continuidade) o que leva ao aparecimento de tensões transversais  $\sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx}$ , produzindo um momento flector

$$m_{yy} = \int z\sigma_{yy}dz = \nu m_{xx}$$

na direcção transversal à do eixo.

As componentes de deformação e de tensão segundo o eixo são:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_{xx}}{E}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E\epsilon_{xx}}{1 - \nu^2} = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2}$$

obtendo-se, por integração na altura da secção,  $h$ ,

$$m_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}dz = -\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}.$$

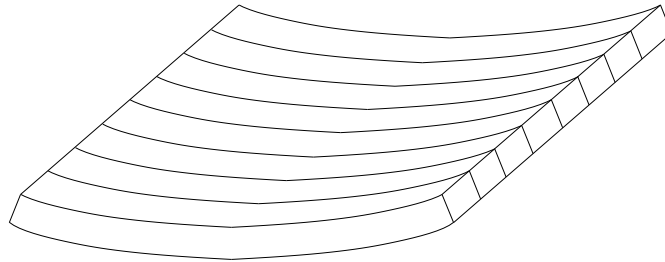


Figura 3.3: Vigas lado a lado.

Para vigas com secção rectangular de largura unitária e altura  $h$  nota-se que há um acréscimo de rigidez quando se passa a restringir a deformação transversal, ou seja, quando se passa de uma viga isolada para um conjunto de vigas paralelas encostadas umas às outras.

- viga isolada,  $m_{xx} = -\frac{Eh^3}{12} \frac{d^2w}{dx^2}$
- vigas paralelas,  $m_{xx} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}$

De notar que esse aumento de rigidez apenas se verifica nos casos em que o coeficiente de Poisson não é nulo.

## 3.2 Lajes rectangulares em flexão cilíndrica

O modelo acima descrito para a análise de conjuntos de vigas paralelas pode ser usado para a análise de lajes que se comportem de forma semelhante ao conjunto de vigas paralelas.

Estão nestas condições lajes em que nem o carregamento nem a geometria ou tipos de apoios variam ao longo da sua maior dimensão. Falamos, pois, de lajes rectangulares. Não de qualquer laje rectangular mas de lajes rectangulares longas apoiadas ao longo da maior dimensão, ver Figura 3.4.

De notar que mesmo para lajes longas livres nos vãos menores (o caso mais evidente de aproximação ao conjunto de vigas paralelas) não se pode garantir que toda a laje está em flexão cilíndrica. Basta constatar que as faixas de laje adjacentes aos bordos livres não podem apresentar a mesma restrição transversal que qualquer faixa afastada desses bordos. Apenas no caso em que o coeficiente de Poisson é nulo se pode garantir que a flexão é cilíndrica.

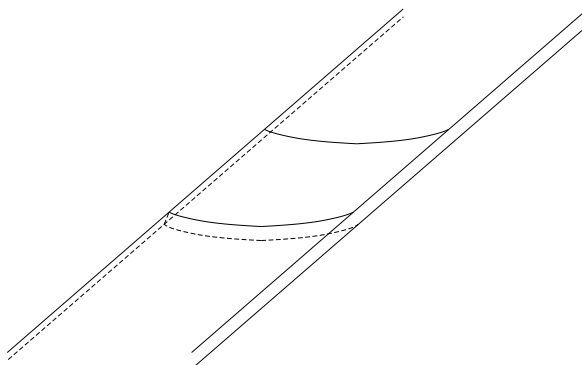


Figura 3.4: Deformada de laje sob flexão cilíndrica.

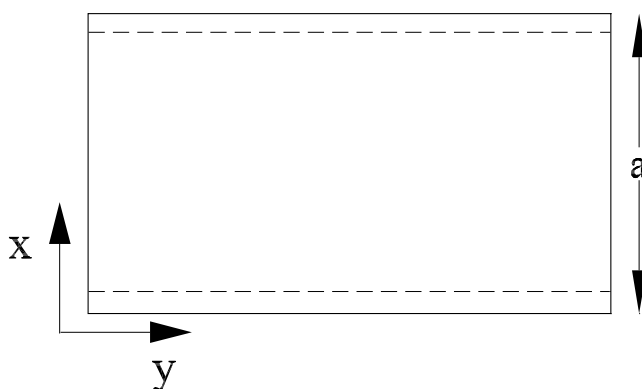


Figura 3.5: Laje rectangular longa.

Assumindo que a flexão é cilíndrica (para a zona específica da laje na qual isso seja verdade) a equação de Lagrange resume-se a:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}, \quad (3.3)$$

com  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ . Notar que não há variação em  $y$ .

Seja então a laje rectangular longa, apoiada nos vãos maiores e livre nos menores, representada na Figura 3.5 e sujeita a carga uniforme  $p$ .

As condições de fronteira são correspondentes a bordo livre nos vãos paralelos a  $x$  (as quais são automaticamente satisfeitas por não haver variação em  $y$ ) e a bordo apoiado nos vãos paralelos a  $y$  a que correspondem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= 0 & \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=0} &= 0 \\ w|_{x=a} &= 0 & \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$

Como apenas há flexão segundo  $x$  a integração directa da equação 3.3 pode ser feita sem dificuldade conduzindo a:

$$w(x, y) = \frac{p}{D} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{24} \right) \quad (3.4)$$

Recorrendo às relações constitutivas podem determinar-se as componentes do tensor dos momentos na laje:

$$m_{xx}(x, y) = \frac{pax}{2} - \frac{px^2}{2} \quad (3.5)$$

$$m_{yy}(x, y) = \nu m_{xx}(x, y) \quad (3.6)$$

$$m_{xy}(x, y) = 0 \quad (3.7)$$

### 3.2.1 Lajes rectangulares em flexão cilíndrica - solução geral

A integração directa da equação 3.3 não apresenta, como vimos, dificuldades. No entanto, será conveniente relembrar, desde já, a forma mais geral de obter a solução de um sistema de equações diferenciais.

Pense-se então na solução geral  $w(x, y)$  como a que resulta da sobreposição de duas outras soluções de mais fácil determinação:

$$w(x, y) = w_c(x, y) + w_p(x, y)$$

onde  $w_c$  é a solução complementar e  $w_p(x, y)$  uma solução particular.

A solução particular  $w_p$  apenas tem que satisfazer a equação diferencial  $\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}$  ao passo que a solução complementar  $w_c$  deve ser construída de forma tal que satisfaça, por si só, a parte homogénea da equação (o que corresponde a satisfazer  $\frac{d^4w}{dx^4} = 0$ ) e permita que a solução geral  $w_p + w_c$  satisfaça também as condições de fronteira.

Como exemplo de aplicação desta técnica considere-se a laje rectangular longa apresentada na Figura 3.6 e cujas condições de fronteira são:

$$w|_{x=0} = 0 \quad \frac{dw}{dx}|_{x=0} = 0 \quad (3.8)$$

$$w|_{x=a} = 0 \quad \frac{d^2w}{dx^2}|_{x=a} = 0 \quad (3.9)$$

A solução da equação homogénea é imediata:

$$w_c(x, y) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (3.10)$$

onde  $C_i$  são constantes a serem determinadas após satisfação das condições de fronteira. Notar que, nesta situação, a carga aplicada transversalmente à laje é nula. As componentes do tensor dos momentos são:

$$m_{xx}(x, y) = -D(6C_1x + 2C_2)$$

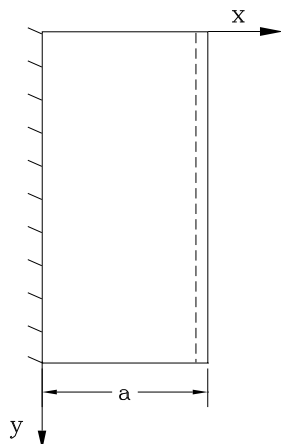


Figura 3.6: Laje rectangular longa encastada num dos bordos maiores e apoiada no bordo oposto.

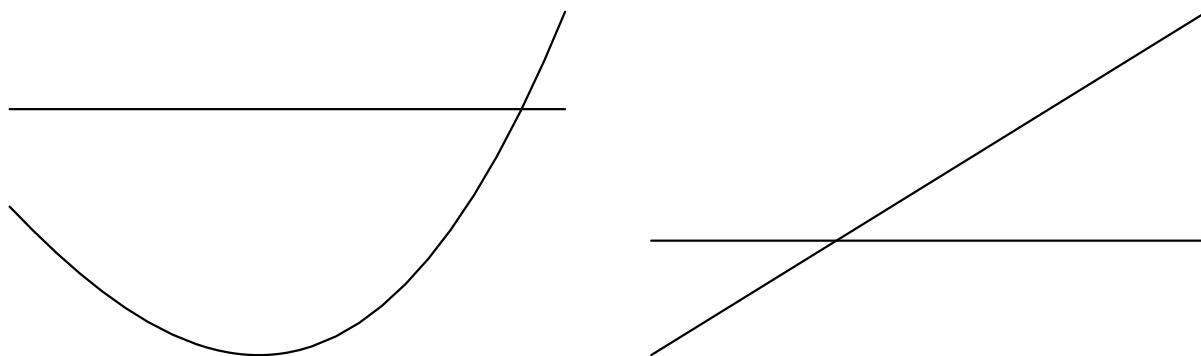


Figura 3.7: Deformada e distribuição de momento  $m_{xx}$  correspondente à solução complementar genérica, ou seja, em função das constantes  $C_1$  a  $C_4$ .

$$\begin{aligned} m_{yy}(x, y) &= \nu m_{xx}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

A variação linear de  $m_{xx}$  segundo  $x$  só poderá querer dizer que o carregamento é constituído exclusivamente por momento  $m_{xx}$  aplicado nos bordos. Representa-se na Figura 3.7 a deformada e a distribuição do momento flector.

Para solução particular podemos tomar a equação 3.4 anteriormente obtida. Representa-se na Figura 3.8 a deformada e a distribuição do momento flector.

A solução geral corresponde à sobreposição das soluções particular e complementar,

$$w(x, y) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + \frac{p}{D} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3 x}{24} \right), \quad (3.11)$$

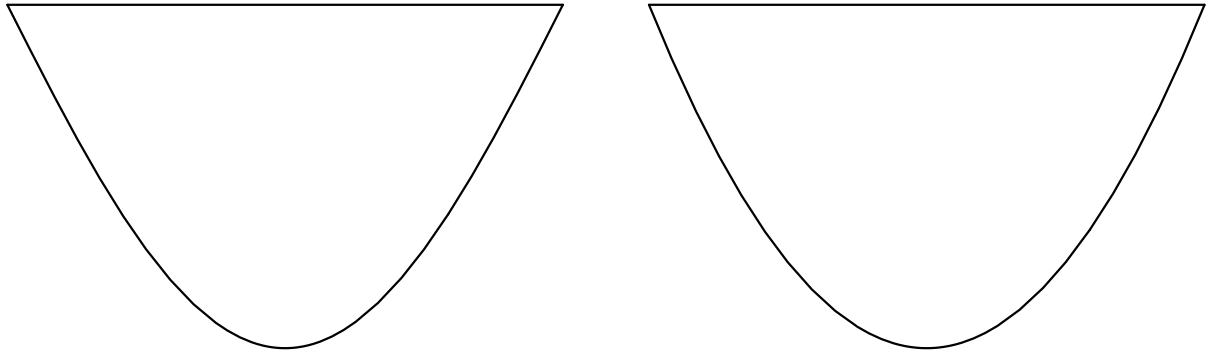


Figura 3.8: Deformada e distribuição de momento  $m_{xx}$  correspondente à solução particular

exigindo-se agora a satisfação das condições de fronteira 3.8 o que resulta em:

$$w(x, y) = \frac{p}{D} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{5ax^3}{48} + \frac{a^2x^2}{16} \right) \quad (3.12)$$

com as constantes  $C_i$  a tomarem os valores:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{pa}{D48} \\ C_2 &= \frac{3pa^2}{D48} \\ C_3 &= -\frac{pa^3}{D24} \\ C_4 &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo agora as constantes na equação 3.10 e no respectivo momento  $m_{xx}$  obtém-se:

$$\begin{aligned} w_c(x, y) &= -\frac{pa}{D48}x^3 + \frac{3pa^2}{D48}x^2 - \frac{pa^3}{D24}x \\ m_{xx}(x, y) &= \frac{pa}{8}x - \frac{pa^2}{8} \end{aligned}$$

sendo estas expressões também representadas na Figura 3.9

Na Figura 3.10, representam-se a solução geral e as suas componentes, particular e complementar.

Desta forma julga-se ter sido posto em evidência que a resolução de problemas de análise de estruturas pelo método das forças não é mais que a resolução de equações diferenciais pela sobreposição de soluções particular e complementar.



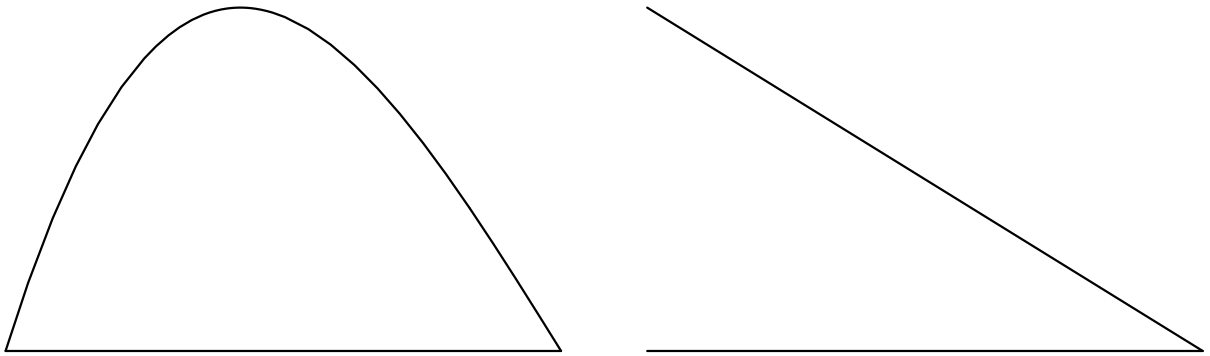


Figura 3.9: Deformada e distribuição de momento  $m_{xx}$  correspondente à solução complementar

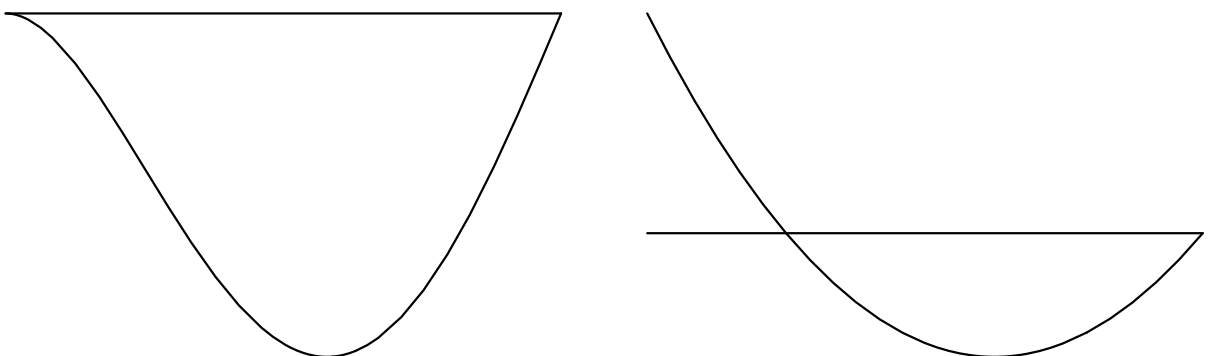


Figura 3.10: Sobreposição das soluções particular e complementar.

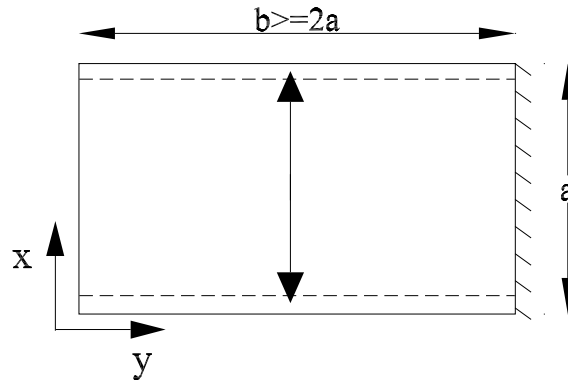


Figura 3.11: Lajes a funcionar predominantemente numa direcção.

### 3.2.2 Lajes rectangulares apoiadas em todo o contorno - aproximação a flexão cilíndrica

Para outras lajes rectangulares longas sujeitas a outros tipos de condições de fronteira poderá ser ainda possível falar-se em flexão cilíndrica, pelo menos em parte da laje, e analisar apenas o que se passa ao nível do menor vão. É isto que, na realidade, se faz em termos de dimensionamento de lajes rectangulares de betão armado. Nestas lajes é usual admitir-se que a flexão se dá (ou seja, a laje funciona) predominantemente numa direcção sempre que o vão maior é superior (ou igual) a duas vezes o vão menor. Em consequência a laje é armada numa só direcção sendo também disposta armadura na direcção do maior vão mas apenas numa proporção próxima à do coeficiente de Poisson tal como se viu na equação 3.7.

## 3.3 Flexão simétrica de lajes circulares

O comportamento de lajes circulares finas, em particular aquelas que são carregadas de forma simétrica em relação ao centro, é, depois das lajes em flexão cilíndrica, o mais simples de descrever. Na realidade, havendo flexão simétrica há dependência apenas da distância ao centro da laje sendo os deslocamentos iguais para todos os pontos da laje equidistantes do centro.

Para lajes deste tipo é conveniente utilizar a representação em coordenadas polares tal como descrito no Apêndice A. No caso de flexão simétrica a equação de Lagrange simplifica-se e pode ser escrita, em coordenadas polares, na forma:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \cdot \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \frac{p(r)}{D}, \quad (3.13)$$

o que se pode também escrever como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p(r)}{D} \quad (3.14)$$

forma esta que torna claro o processo de integração que permite conduzir à solução da equação diferencial já que basta ir integrando sucessivamente.

Para lajes circulares uniformemente carregadas o processo torna-se ainda mais simples se se tiver em conta que a resultante do esforço transversal à distância  $r$  do centro da laje deve equilibrar a resultante da carga na área envolvida, ou seja:

$$2\pi r Q_r = \pi r^2 p \quad (3.15)$$

e que, ver equação A.7:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right] = \frac{pr}{2D} \quad (3.16)$$

Integrando sucessivamente obtém-se, ver [4], para uma laje circular de raio  $a$  uniformemente carregada:

$$w = \frac{pr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \log \frac{r}{a} + C_3 \quad (3.17)$$

A determinação das constantes  $C_i$  é feita, para lajes específicas, impondo as condições de fronteira apropriadas.

Seja, por exemplo, o caso de uma laje circular encastrada. As condições de bordo encastrado correspondem a anular o deslocamento transversal e a rotação em todos os pontos do bordo, ou seja, à distância  $a$  da origem. Resta apenas uma constante cuja determinação pode ser levantada notando que a rotação é também nula no centro da laje já que a laje se encontra em flexão simétrica.

Assim, a solução para esta laje é:

$$w = \frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (3.18)$$

Os esforços e demais grandezas de interesse são facilmente obtidos recorrendo às expressões apropriadas que constam do Apêndice A.

Um outro caso que não apresenta dificuldades de maior é o da laje circular simplesmente apoiada a qual se obtém da solução para a laje encastrada sobrepondo-lhe a acção de momentos uniformemente distribuídos a actuar no bordo com intensidade igual e de sinal oposto aos momentos no bordo encastrado. Esta mesma técnica da sobreposição é usada para encontrar a solução para lajes circulares com uma abertura circular concêntrica sujeitas a carga uniforme, a momento flector ou a esforço transversal uniformemente distribuído no bordo da abertura.

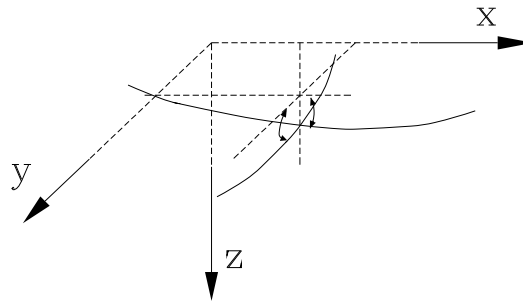


Figura 3.12: Representação da deformada de uma laje.

### 3.4 Análise de lajes finas - caso geral

A análise de lajes que não se possam considerar longas (ou de lajes que não apresentem sequer forma rectangular) requer a consideração da flexão em ambas as direcções, ver Figura 3.12. Havendo flexão em ambas as direcções, há também curvaturas com momentos a desenvolverem-se necessariamente em ambas as direcções. Cada um dos momentos depende, principalmente mas não só, da curvatura na direcção correspondente. Porque existe compatibilidade dos deslocamentos transversais ( $w(x, y)$  é único para um determinado ponto) as curvaturas são necessariamente maiores para o menor dos vãos. Observa-se assim que os momentos segundo o menor vão são superiores aos do vão maior para iguais condições de fronteira em todos os bordos de uma laje rectangular. Claro que para diferentes condições de fronteira já isso não tem, forçosamente, de se verificar (basta pensar no caso de uma laje apoiada nos vãos menores e livre nos maiores).

#### 3.4.1 Solução analítica

Na secção 3.2.1 vimos que a solução analítica da equação de Lagrange passa normalmente (a menos dos casos simples em que isso pode ser evitado) por encontrar a combinação de duas soluções, as soluções complementar e particular, que, conjuntamente, devem verificar as condições de fronteira do problema. A solução complementar, recorda-se, é solução da equação homogénea e a solução particular, por si só, não tem que verificar as condições de fronteira do problema.

Para uma laje geral, havendo flexão em ambas as direcções, as várias grandezas, cinemáticas e estáticas, envolvidas na solução do problema variam em ambas as direcções e deverão verificar a equação de Lagrange, tal como formulada no capítulo anterior, conjuntamente com a satisfação das condições de fronteira:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (3.19)$$

A busca do campo de deslocamento transversal  $w(x, y)$  corresponde, então, a encontrar uma solução particular  $w_p$  e uma solução complementar  $w_c$  que, sobrepostas, satisfaçam todos os requisitos.

### Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga sinusoidal

Este é um caso simples para o qual há uma solução analítica também simples. Para ajudar à compreensão das várias grandezas envolvidas num qualquer problema de lajes finas será feita, com base na solução analítica, a determinação e representação gráfica nas páginas seguintes de todas elas bem com a demonstração de que a solução é compatível e equilibrada, ou seja, é exacta.

Considere-se uma laje rectangular de dimensões  $a, b$  sujeita à carga sinusoidal

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (x, y) \in [0, a][0, b], \quad (3.20)$$

em que  $q_0$  é a intensidade da carga no ponto médio da laje.

A solução da equação de Lagrange sujeita às condições de fronteira de bordo simplesmente apoiado é:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.21)$$

É relativamente fácil obter os campos de esforços correspondentes a esta solução bastando para isso recorrer às expressões apropriadas.

Particularizando para uma laje quadrada de lado 4m sujeita a uma carga sinusoidal com intensidade máxima  $q_0 = 1\text{kN/m}^2$  e resultante  $R_q = 64/\pi^2$ , representada na Figura 3.13, e admitindo que a rigidez de flexão é unitária (com  $\nu = 0.15$ ) obtém-se o campo de deslocamentos transversais representado na Figura 3.14. Nesta Figura optou-se por representar  $-w(x, y)$  para que a deformada surgisse com a concavidade para *baixo*; o programa utilizado na elaboração dos gráficos usa um referencial directo com o eixo  $z$  para cima o que é contrário à convenção normalmente utilizada na análise de lajes.

De notar que, pelo facto da equação 3.21 ser uma solução exacta para a laje e carregamento em análise, existe satisfação plena das condições de fronteira. Na Figura 3.14 pode observar-se que o deslocamento transversal, na forma  $w(x, y) = k \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ , é sempre nulo nos bordos da laje ( $w(x, y) = 0$  para  $x = 0, x = a, y = 0$  e  $y = b$ ) verificando-se assim uma das duas condições de fronteira,

Os campos de rotações encontram-se representados na Figura 3.15 e os campos de curvaturas de flexão e de torção respectivamente nas Figuras 3.16 e Figura 3.17. Notar que as rotações tangentes aos bordos são nulas mas não as rotações normais. Por exemplo para o bordo  $x = 4$ , logo, paralelo ao eixo  $y$ , a rotação normal é a que se desenvolve segundo o eixo  $y$  sendo essa rotação designada por  $\theta_x$ , ver Figura 3.12. A rotação tangente, ou seja, segundo o eixo  $x$ , é nula nesse bordo.

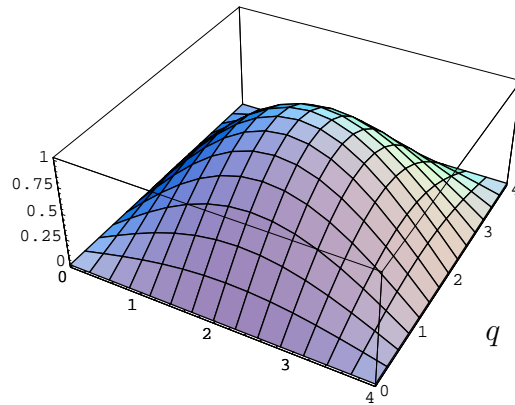


Figura 3.13: Carga sinusoidal.

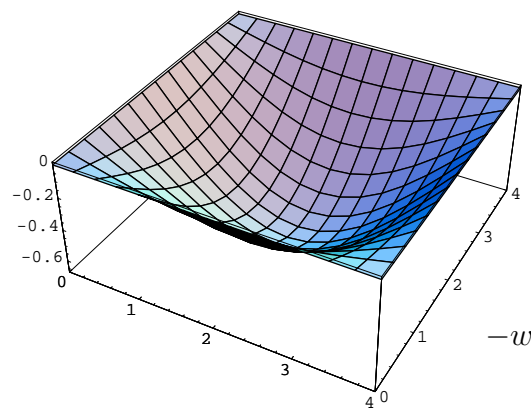


Figura 3.14: Campo de deslocamentos transversais.

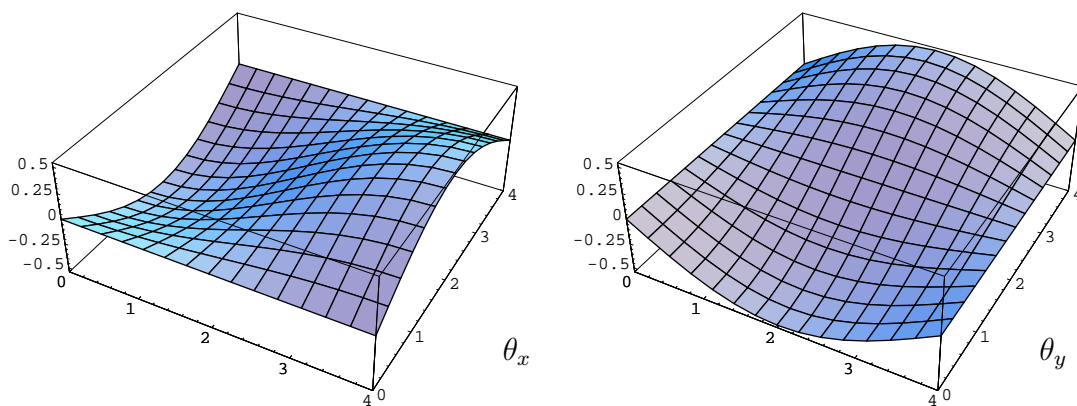


Figura 3.15: Campo de rotações.

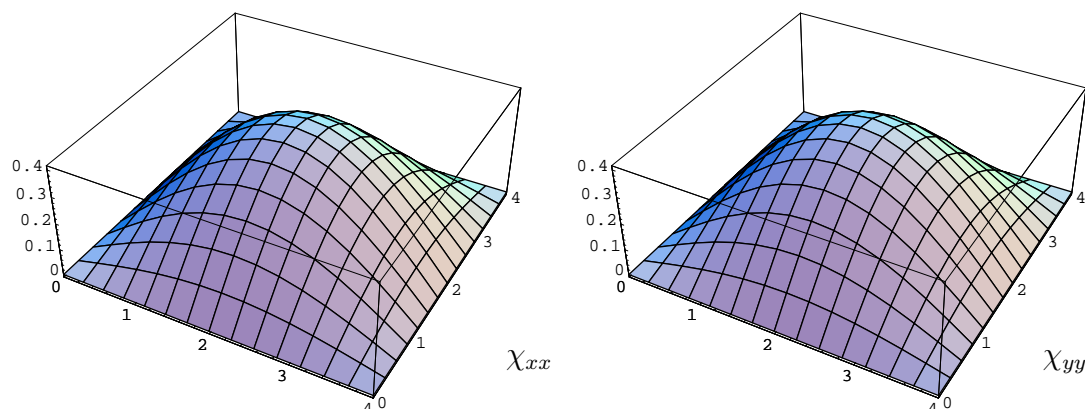


Figura 3.16: Campo de curvaturas de flexão.

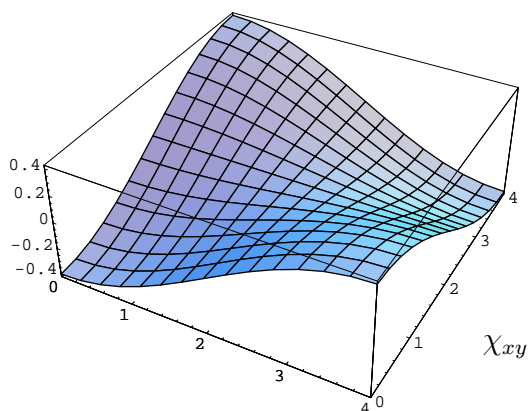


Figura 3.17: Campo de curvaturas de torção.

Os campos de momentos flectores e de momento torsor representam-se nas Figuras 3.18 e 3.19, respectivamente. Na Figura 3.18 é possível verificar a satisfação da segunda condição de fronteira, ou seja, o momento flector normal, devido às tensões normais, é nulo nos bordos da laje.

Constata-se que a equação 3.21 representa a solução exacta da laje estudada uma vez que tanto a equação diferencial como todas as condições de fronteira são verificadas.

Não é difícil verificar o equilíbrio global em termos de forças verticais bastando para isso calcular a resultante dos esforços transversos no bordo e comparar com a resultante das cargas aplicadas  $R_q = 64/\pi^2$  como se viu atrás.

Assim e sabendo que o campo de esforços transversos, Figura 3.20, é dado por:

$$v_x = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4},$$

$$v_y = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi y}{4} \sin \frac{\pi x}{4},$$

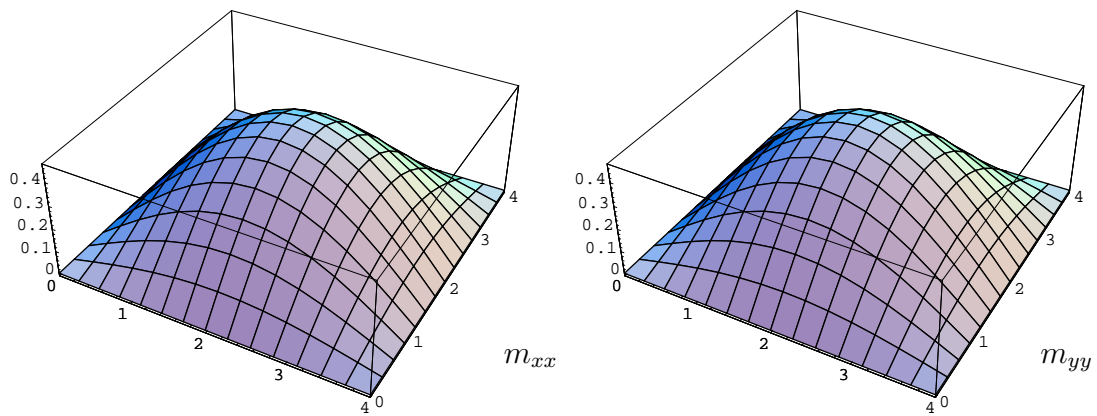


Figura 3.18: Campo de momentos flectores.

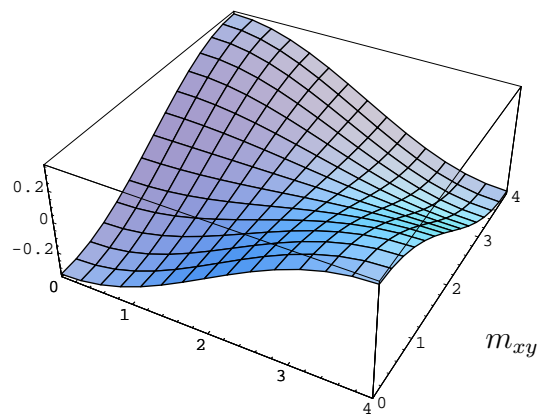


Figura 3.19: Campo de momentos torsores.



a integração destes ao longo dos bordos tem como resultante o valor  $4 \times 16/\pi^2$  ou seja o mesmo que a resultante das cargas aplicadas.

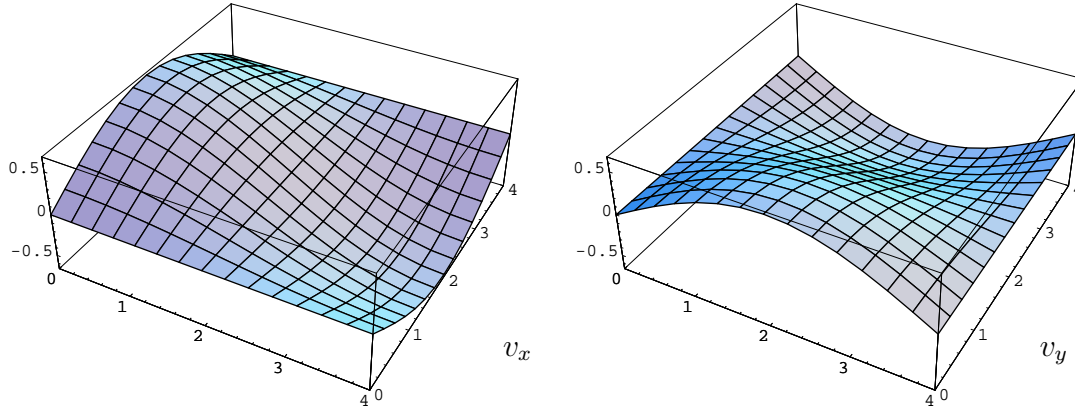


Figura 3.20: Campo de esforços transversos.

Sempre que exista variação dos momentos torsores nos bordos, e tendo em conta a equivalência estática entre o momento torsor e forças de corte, as reacções de apoio nos bordos da laje são representadas pelos esforços transversos efectivos:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{3 - \nu}{\pi} \cos \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4}, \\ r_y &= \frac{3 - \nu}{\pi} \cos \frac{\pi y}{4} \sin \frac{\pi x}{4}, \end{aligned}$$

também representados na Figura 3.21.

A resultante destes esforços ao longo dos bordos tem o valor  $4 \times 8(3 - \nu)/\pi^2$  ou seja difere da resultante das cargas aplicadas.

Para que se verifique o equilíbrio global na direcção vertical devem também ser adicionadas as reacções de canto. Assim, ao valor  $4 \times 8(3 - \nu)/\pi^2$  da resultante dos esforços transversos efectivos deve ser adicionada a resultante das reacções de canto a qual toma o valor  $4 \times 8(1 - \nu)/\pi^2$  verificando-se o equilíbrio global na direcção vertical.

### 3.4.2 Soluções em forma de série

Para diversas situações não é possível encontrar soluções analíticas em forma fechada apenas existindo solução sob a forma de séries infinitas. Incluem-se nestas as soluções de Navier e de Lévy que veremos de seguida.

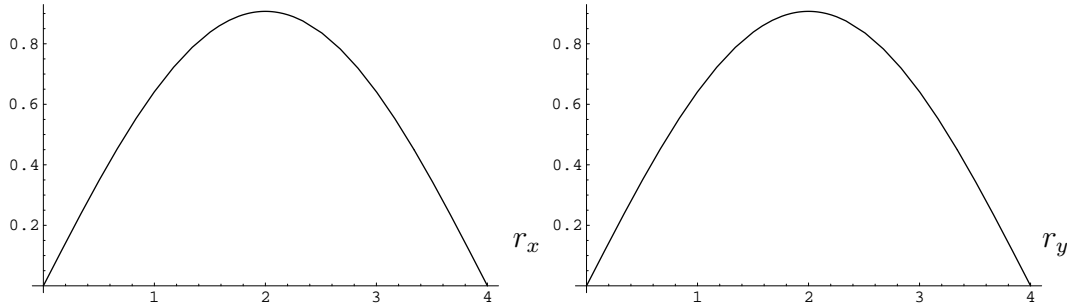


Figura 3.21: Esforços transversos efectivos nos bordos  $x = 0$  e  $y = 0$ , respectivamente.

### Laje rectangular simplesmente apoiada - solução de Navier

Normalmente as cargas a actuar sobre as lajes não são, como no exemplo anterior, sinusoidais.

É, no entanto, possível descrever qualquer função (leia-se qualquer carregamento) por meio de uma série dupla de Fourier.

Recorrendo a essa representação, Navier sugeriu que se tomasse como solução geral da equação de Lagrange (para o caso da laje rectangular simplesmente apoiada) a sobreposição das soluções para infinitos carregamentos, cada um da forma duplamente sinusoidal como a do exemplo anterior.

Assim, para uma carga genérica  $q = f(x, y)$  Navier propôs a seguinte solução,

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.22)$$

com a carga genérica a ser representada por

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.23)$$

Para o caso de carga uniformemente distribuída de intensidade  $q_0$ , toma-se  $a_{mn} = 16q_0/\pi^2 mn$  para  $m$  e  $n$  inteiros ímpares.

Apesar da solução de Navier só poder ser aplicada, directamente, a lajes rectangulares com todos os bordos simplesmente apoiados pode ser, de uma forma indirecta, usada para a análise de outros tipos de lajes rectangulares uma vez que se tome esta solução como a solução particular. Existem ainda soluções para muitos outros carregamentos, tais como: carga linear numa direcção e uniforme na outra, carga de faca constante ou não, carga concentrada, etc.

### Laje rectangular simplesmente apoiada uniformemente carregada - solução de Lévy

Esta solução é um pouco mais simples que a anterior já que tira partido da regularidade do comportamento numa das direcções o que permite separar as variáveis (separar o efeito numa direcção do efeito na outra direcção) e usar uma expansão em série simples em oposição à dupla série da solução de Navier.

É um método mais geral que o de Navier já que não se restringe ao caso de todos os bordos terem que ser simplesmente apoiados. Neste método basta que dois bordos paralelos sejam simplesmente apoiados podendo os outros ter outras condições de apoio. Se, por exemplo, os vãos segundo  $y$  forem simplesmente apoiados pode admitir-se que:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.24)$$

com  $Y_m$  a depender de  $y$  apenas. Nas expressões seguintes considera-se  $(x, y) \in [0, a][ -b/2, b/2 ]$ .

A solução de Lévy para uma laje rectangular simplesmente apoiada é:

$$w = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.25)$$

em que

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2(\alpha_m \tanh \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m}, \\ B_m &= \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m}, \\ \alpha_m &= \frac{m\pi b}{2a}, \end{aligned}$$

para  $m$  inteiro ímpar.

### Comentário às soluções em série

Os métodos de Navier e de Lévy e as suas variantes não são de tão fácil utilização quanto parecem. Em primeiro lugar porque só há soluções para os casos mais simples (também é verdade que são esses os casos de maior interesse em estruturas correntes) e depois porque mesmo casos simples podem não apresentar a convergência tão rápida quanto se espera.

Nos casos mais simples não há dúvida que dois ou três termos da série são suficientes para obter uma razoável aproximação para o deslocamento transversal máximo, por exemplo. No entanto, se se tentar obter o momento flector já provavelmente esses três termos não são suficientes e seis ou sete terão de ser usados. Se os esforços transversos também forem necessários provavelmente outros três ou quatro termos terão de ser considerados.

E isto para o caso mais simples da laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída.

Fernandes [8] refere que, para se obterem resultados com precisão à sexta casa decimal (o que é um exagero evidente em termos práticos mas já não tanto assim quando se tenta validar uma nova técnica numérica como foi o caso do trabalho citado), podem ser necessários centenas ou mesmo milhares de termos das séries.

### 3.4.3 Soluções em forma de tabela

Para obviar às dificuldades referidas acima em relação às soluções em forma de série recorre-se a tabelas, ver [1], em que os termos das séries já estão devidamente calculados.

Considerem-se as expressões apropriadas para os momentos flectores obtidos com base no campo de deslocamentos da laje, nomeadamente:

$$m_{xx}|_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m^2 (2\nu B_m - (1-\nu)A_m) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$m_{yy}|_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} m^2 (2B_m + (1-\nu)A_m) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Não é difícil verificar que se podem tabelar os coeficientes destas séries numa forma conveniente, por exemplo em função de  $qa^2$ . A partir daqui é muito simples a obtenção dos momentos bastando para isso fazer, por exemplo para o momento segundo  $x$ :

$$m_{xx}|_{y=0, x=a/2} = \beta qa^2,$$

com o coeficiente  $\beta$  a ser lido de uma tabela.

### Sensibilidade dos resultados à variação do coeficiente de Poisson

Para lajes de igual geometria, condições de fronteira e módulo de elasticidade, a influência do coeficiente de Poisson sobre os resultados pode ser significativa no que diz respeito aos valores dos esforços já não o sendo em relação aos deslocamentos transversais.

Estes são inversamente proporcionais à rigidez de flexão da laje  $D$ . Se calcularmos esta para  $\nu = 0.15$  e  $\nu = 0.0$  obtém-se, respectivamente,  $D_{\nu=0.15} = 0.085Eh^3$  e  $D_{\nu=0.0} = 0.083Eh^3$ . A diferença, menos de 3% no que diz respeito aos deslocamentos, é pequena. Sendo a rigidez de flexão menor para  $\nu$  menor, são os momentos menores também ao passo que os deslocamentos são maiores. Os esforços transversos efectivos são também afectados, mas em menor grau, não o sendo em absoluto no caso de bordos encastrados.

Mais em particular pode provar-se, ver Timoshenko [4], que para lajes cujos bordos são simplesmente apoiados (e rectos) ou encastrados (mesmo que curvos) a quantidade  $Dw$  é independente de qualquer das constantes elásticas,  $E$  e  $\nu$ .

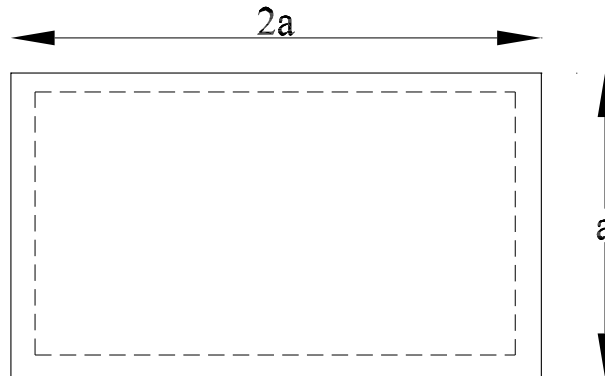


Figura 3.22: Laje rectangular simplesmente apoiada.

Em lajes cujos bordos são do tipo acima referido é possível encontrar expressões que permitem obter os esforços para um dado coeficiente de Poisson  $\nu'$  uma vez conhecidos os esforços para outro coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$m'_x = \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu')m_{xx} + (\nu' - \nu)m_{yy}] \quad (3.26)$$

$$m'_y = \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu')m_{yy} + (\nu' - \nu)m_{xx}] \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

A existência destas expressões justifica que em [1], por exemplo, se encontrem diversas tabelas obtidas para a situação de coeficiente de Poisson nulo.

### 3.5 Soluções não exactas

A obtenção de soluções exactas para o problema da flexão de lajes finas é, na maioria dos casos, bastante difícil senão mesmo impossível. A utilização de técnicas numéricas (como o método dos elementos finitos ou o das diferenças finitas) constitui a ferramenta que permite obter soluções aproximadas (na prática, com o nível de qualidade que se deseje) para a generalidade das lajes. Estas técnicas, que atingem já um grau de sofisticação elevado, serão objecto de atenção mais adiante.

Mesmo sem o recurso a essas técnicas numéricas é possível, também, obter soluções aproximadas com interesse prático e de uma forma muito mais "ligeira".

Considere-se, por exemplo, a laje rectangular representada na Figura 3.22 e sujeita a carga uniformemente distribuída de intensidade  $p$ .

Apesar desta laje se poder considerar longa (já que a sua maior dimensão é o dobro da menor) e ser, em princípio, dimensionada como funcionando numa direcção apenas em

termos práticos, é óbvio que a solução exacta inclui flexão em ambas as direcções pois todos os bordos estão apoiados.

Contudo, é possível aceitar o erro subjacente à consideração da hipótese de flexão cilíndrica e tomar como razoável (para determinados fins) uma aproximação em que a laje só funcione numa direcção.

Neste caso, para  $E = 1$ ,  $a = 1$ ,  $h = a/10$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $p = 1$ , tem-se, recuperando os resultados obtidos na secção 3.2:

$$w(x, y) = \frac{1}{D} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{24} \right) \quad (3.29)$$

$$m_{xx}(x, y) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (3.30)$$

$$m_{yy}(x, y) = \nu m_{xx}(x, y) \quad (3.31)$$

$$m_{xy}(x, y) = 0 \quad (3.32)$$

Para se aferir o grau de aproximação desta solução face aos resultados exactos foi feito o cálculo dos valores máximos (ou seja, exactamente no centro da laje) do deslocamento transversal e componentes do tensor dos momentos, resultados esses representados, de forma normalizada<sup>1</sup>, na Tabela 3.1. Para a obtenção dos valores exactos utilizou-se a solução de Navier com cerca de 20 termos.

	$w$	$m_{xx}$	$m_{yy}$	$m_{xy}$
sol. aprox	0.0130	0.1250	0.0375	0.0
Navier	0.0101	0.1017	0.0464	0.0

Tabela 3.1: Resultados aproximado e exacto no centro da laje rectangular.

Como transparece dos resultados o grau de aproximação é, para esta laje, aceitável.

Faz-se notar, contudo, que esta solução não é equilibrada nem compatível (para mais pormenores ver capítulo 2). Apenas na zona central da laje, para a qual condições próximas de flexão cilíndrica existem, tal solução aproxima convenientemente a laje real.

A solução aproximada não é compatível porque, à partida, não apresenta variação em  $y$  logo não é possível a existência de curvatura de flexão nessa direcção a qual tem de existir uma vez que todos os bordos da laje são simplesmente apoiados.

A solução aproximada também não é equilibrada. De facto, apesar da equação de equilíbrio ser satisfeita, basta ver que não é satisfeita a condição de fronteira estática ( $m_{yy} = 0$ ) nos bordos paralelos a  $x$ .

Concluindo, os resultados mostram que o facto da solução para esta laje não ser compatível nem equilibrada não é determinante. Será que haveria algo a ganhar se a compatibilidade ou o equilíbrio fossem verificados?

<sup>1</sup>Consiste em multiplicar o deslocamento transversal por  $D/pa^4$ , e os momentos por  $1/pa^2$ .

Defina-se a mais simples das soluções que poderá pertencer à família das soluções compatíveis para esta laje:

$$w(x, y) = \frac{1}{D}(x-1)^2(y-2)^2 \quad (3.33)$$

Verifique-se agora se a solução é realmente compatível. Esta solução para o campo de deslocamento transversal é compatível porque, para além de ser contínua e conduzir a curvaturas de flexão possíveis, verifica as condições de fronteira do tipo cinemático  $w|_{x=0} = 0$ ,  $w|_{x=1} = 0$ ,  $w|_{y=0} = 0$  e  $w|_{y=2} = 0$ .

Os esforços correspondentes a esta solução compatível são, recorrendo às relações constitutivas:

$$m_{xx}(x, y) = -[2(y-2)^2 + \nu 2(x-1)^2] \quad (3.34)$$

$$m_{yy}(x, y) = -[2(x-1)^2 + \nu 2(y-2)^2] \quad (3.35)$$

$$m_{xy}(x, y) = -(1-\nu)4(x-1)(y-2) \quad (3.36)$$

É evidente que esta solução não é equilibrada. Para começar a equação de equilíbrio (após simplificação) não é verificada:

$$-\nu 4 - \nu 4 - 2(1-\nu)4 + 1 \neq 0 \quad (3.37)$$

É possível encontrar uma solução compatível do mesmo tipo da anterior mas que verifique o equilíbrio. Como? tendo em consideração que se, por acaso, a carga fosse  $p = 2$  já a equação de equilíbrio se verificaria. Então, a resposta óbvia é escalar a solução compatível com esse valor o que resulta em:

$$w(x, y) = \frac{1}{2D}(x-1)^2(y-2)^2 \quad (3.38)$$

e

$$m_{xx}(x, y) = -[(y-2)^2 + \nu(x-1)^2] \quad (3.39)$$

$$m_{yy}(x, y) = -[(x-1)^2 + \nu(y-2)^2] \quad (3.40)$$

$$m_{xy}(x, y) = -(1-\nu)2(x-1)(y-2) \quad (3.41)$$

As condições de fronteira do tipo estático -  $m_{yy}|_{x=0} = 0$ ,  $m_{yy}|_{x=1} = 0$ ,  $m_{xx}|_{y=0} = 0$ ,  $m_{xx}|_{y=2} = 0$  - contudo, não são satisfeitas. Consequentemente, os esforços determinados com esta solução compatível não têm utilidade.

Representam-se na Tabela 3.2 os resultados, normalizados, obtidos com esta solução.

É claro que os resultados não são aceitáveis. Esta solução compatível não serve. Outras soluções compatíveis podem ser testadas mas acabamos sempre por não conseguir aproveitá-las a menos que consigamos uma aproximação razoável das condições de fronteira estáticas o que pode ser uma tarefa inglória.

	$w$	$m_{xx}$	$m_{yy}$	$m_{xy}$
sol. compatível	0.1250	-1.0750	-0.5500	-0.700
Navier	0.0101	0.1017	0.0464	0.0

Tabela 3.2: Resultados aproximado - solução compatível mas não equilibrada - e exacto no centro da laje rectangular.

E se tentarmos com uma solução equilibrada mas não compatível?

Defina-se a mais simples das soluções que poderá pertencer à família das soluções equilibradas para esta laje:

$$m_{xx}(x, y) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (3.42)$$

$$m_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.43)$$

$$m_{xy}(x, y) = 0, \quad (3.44)$$

solução esta que corresponde a assumir que toda a carga se distribui apenas na direcção do menor de vão e que apenas a componente  $m_{xx}$  é envolvida. A equação de equilíbrio é automaticamente satisfeita bem com as condições de fronteira estáticas.

As curvaturas correspondentes a estes esforços são

$$\chi_{xx}(x, y) = \frac{1}{(1 - \nu^2)D} \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right] \quad (3.45)$$

$$\chi_{yy}(x, y) = \frac{-\nu}{(1 - \nu^2)D} \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right] \quad (3.46)$$

$$\chi_{xy}(x, y) = 0, \quad (3.47)$$

É também facilmente verificável que estas curvaturas não permitem que sejam satisfeitas as condições de fronteira do tipo cinemático. Notar que para  $y = 0$  ou  $y = 2$ ,  $\chi_{yy}$  é diferente de zero o que faz com que a condição nesse bordo não possa ser satisfeita. Em resumo, o campo de deslocamento transversal que pudesse vir a ser construído com base nas curvaturas também não teria sentido.

Representam-se na Tabela 3.3 os resultados, normalizados, obtidos com esta solução.

	$w$	$m_{xx}$	$m_{yy}$	$m_{xy}$
sol. equilibrada	-	0.1250	0.0	0.0
Navier	0.0101	0.1017	0.0464	0.0

Tabela 3.3: Resultados aproximado - solução equilibrada mas não compatível - e exacto no centro da laje rectangular.

Esta solução equilibrada não permite obter estimativas razoáveis para o deslocamento transversal mas já permite a obtenção de resultados razoáveis para os esforços.



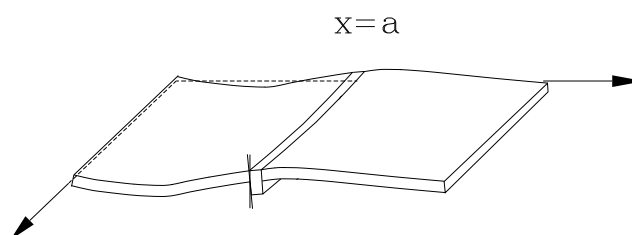


Figura 3.23: Lajes contínuas.

Seria, no entanto, tão difícil conseguir aproximar razoavelmente a compatibilidade para uma solução inicial equilibrada como o é conseguir aproximar razoavelmente o equilíbrio para uma solução inicial compatível e essa já vimos não ser nada fácil.

Este exercício mostra que não é de todo irrelevante qual a condição (equilíbrio ou compatibilidade) que se quer ver verificada por determinada solução aproximada. Em geral, e para efeitos de dimensionamento de lajes, é mais útil e fácil proceder à definição de soluções estaticamente admissíveis ao invés de tentar definir soluções cinematicamente admissíveis.

### 3.6 Análise de lajes vigadas contínuas

Até aqui só se referiu o caso de um painel de laje isolado. Quando, como é corrente em edifícios, as lajes são contínuas, ou seja, existem bordos que servem de interface entre painéis adjacentes de laje, é necessário, nomeadamente, compatibilizar os momentos e o esforço transversal de um painel para outro.

Se a laje contínua for analisada por meio de programas de cálculo automático de grelhas ou com elementos finitos não há nenhuma dificuldade extra em relação à análise de painéis isolados. Apenas aumenta a dimensão do problema, ou seja, o número de barras ou elementos a considerar.

É possível analisar lajes contínuas com base nas tabelas de lajes isoladas. Na realidade, este é o procedimento normalmente seguido em estruturas correntes em que se faz uma análise em separado de cada painel de laje, considerando-se o bordo interface como encastrado, equilibrando-se os esforços à posteriori.

O equilíbrio é feito considerando-se que, nesse bordo, o momento instalado é a média dos momentos de um e outro painel (desde que o valor médio seja igual ou superior a uma determinada percentagem do maior dos momentos, por exemplo 80%). Claro que se um dos painéis estiver em consola o momento na interface é precisamente o momento do painel em consola, como é natural.

Alterar o valor do momento num determinado bordo obriga à alteração dos restantes

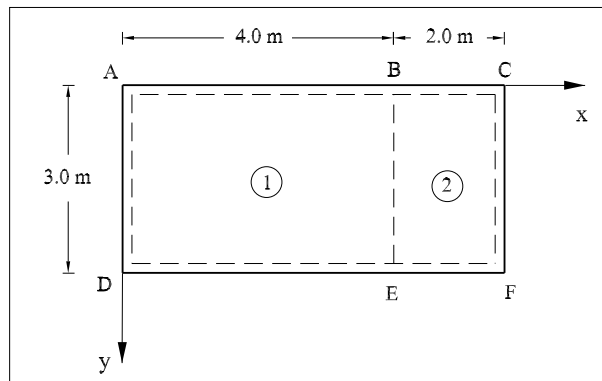


Figura 3.24: Laje contínua com dois tramos.

momentos em particular a meio vão. Considere-se o caso em que a média dos momentos na interface é inferior ao momento inicialmente aí calculado para um determinado painel.

Em termos de momentos a meio vão, e para que se continue a estar do lado da segurança, o que se faz é adicionar ao momento de meio vão (admitindo, como é usual, que este momento seja positivo) metade da diferença entre a média dos momentos (normalmente negativos) na interface e o momento na interface do painel que se está a considerar.

Com este procedimento garante-se, de certa forma, a satisfação do equilíbrio (no bordo) e da segurança. Se, por acaso, a média dos momentos na interface é superior ao momento inicialmente aí calculado para um determinado painel então é usual não tirar partido disso na diminuição do momento a meio vão deixando-o como está.

### 3.6.1 Resolução analítica de lajes contínuas

A resolução analítica, rigorosa, de alguns tipos de lajes contínuas é possível com base nas técnicas anteriormente descritas.

Considere-se, em particular, o caso de uma laje rectangular suportada em viga em todos os bordos e ainda numa viga interior tal como representado na Figura 3.24.

Admitindo que a laje pode rodar livremente em torno da viga de interface, a solução pode ser obtida recorrendo ao método das forças, ou seja, admitindo em primeiro lugar que os painéis estão isolados, o que origina uma rotação relativa de cada lado da interface, e compatibilizando essa rotação com base na solução de laje simplesmente apoiada sujeita a momento distribuído no bordo (respectivamente, soluções particular e complementar).

A solução complementar, correspondente à acção de momento distribuído (simétrico ou anti-simétrico sendo, por isso, possível representar qualquer tipo de momento distribuído nos bordos) variável nos bordos de coordenada  $y$  constante, é dada em Timoshenko [4] na

forma:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (3.48)$$

com as funções  $Y_m$  a tomar a forma:

$$Y_m = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}, \quad (3.49)$$

em que as constantes são determinadas a partir das condições de fronteira estáticas (fazendo a decomposição simétrico/anti-simétrico) as quais representam o carregamento e são do tipo:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.50)$$

com os termos  $E_m$  a serem determinados de forma análoga à representação de cargas uniformes nos métodos de Navier e de Lévy.

Convenhamos que esta forma, rigorosa, de resolução de lajes contínuas vigadas não é das mais fáceis e, daí, ser mais utilizada a técnica aproximada de redistribuição dos momentos vista atrás.

### 3.7 Lajes apoiadas em pilares - lajes fungiformes

A análise de lajes predominantemente apoiadas em pilares apresenta algumas características especiais mas não deixa de ser calculada por métodos semelhantes aos usados para lajes vigadas.

Timoshenko [4] sugere, como passo intermédio, a utilização da solução para laje rectangular suportada por vigas flexíveis. Após essa solução ter sido obtida (o que não é fácil) é relativamente simples encontrar o limite para o caso de rigidez de flexão das vigas nula.

Existem soluções um pouco mais simples para o caso de laje suposta infinita apoiada numa grelha uniforme de pilares.

Em qualquer caso o que faz sentido dizer no âmbito destes apontamentos é que não é tarefa fácil resolver, por métodos analíticos, lajes apoiadas em pilares. O recurso a tabelas (que são relativamente escassas), a métodos simplificados baseados no teorema estático da análise plástica ou a técnicas numéricas é, em geral, indispensável.

Não se pode, no entanto, dizer que a utilização de técnicas numéricas, como a dos elementos finitos, na análise de problemas deste tipo nos isenta de qualquer problema. De facto, como se verá mais adiante, a modelação de efeitos muito localizados, como os pilares ou cargas concentradas, não é uma das características melhores do método dos elementos finitos e os resultados a que somos conduzidos vão depender bastante do grau de refinamento considerado.

# Apêndice A

## Lajes finas em coordenadas polares

(Extraído de Fernandes [8]) Considere-se um sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  centrado no ponto  $O$ . A relação entre coordenadas polares e cartesianas é dada pelas equações:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

A matriz jacobiana da transformação,  $\mathbf{J}$ , é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A inclinação na direcção  $x$  é dada por

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Para a direcção  $y$  tem-se

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando sucessivamente os operadores diferenciais (A.2) e (A.3) as derivadas de ordem superior podem ser obtidas. Substituindo estes resultados nas expressões das componentes do tensor dos momentos e as dos esforços transversos obtêm-se as expressões dos momentos flector e torsor e esforços transversos, em coordenadas polares:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -(1 - \nu) D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w, \quad (\text{A.7})$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w, \quad (\text{A.8})$$

onde  $\nabla^2$  é o operador harmónico em coordenadas polares, dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (\text{A.9})$$

A equação diferencial governativa do problema é, recorde-se,

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\nabla^4 = \nabla^2 (\nabla^2)$  é o operador biharmónico.

Ao longo de um bordo de normal exterior  $\vec{n}$ , para a rotação normal, momentos flector e torsor normais e esforço transversal normal tem-se, respectivamente,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \cos \phi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (\text{A.11})$$

$$M_n = M_r \cos^2 \phi + M_\theta \sin^2 \phi + 2M_{r\theta} \sin \phi \cos \phi, \quad (\text{A.12})$$

$$M_{nt} = M_{r\theta} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + (M_\theta - M_r) \sin \phi \cos \phi, \quad (\text{A.13})$$

$$Q_n = \cos \phi Q_r + \sin \phi Q_\theta, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\phi = \alpha - \theta$ .

O esforço transversal efectivo normal,  $V_n$ , é dado por:

$$\begin{aligned} V_n = & -D \left\{ \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \phi \right. \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \sin \phi + (1 - \nu) \left[ \left( \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) \sin \phi \cos \phi \right. \\ & \left. \left. + \left( -\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \right] (-\sin \phi) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} \right) \sin \phi \cos \phi \right. \\
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \\
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w^3}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
& \left. + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) 4 \cos \phi \sin \phi \right) \frac{\cos \phi}{r} \Bigg\}.
\end{aligned}$$



# Bibliografia

- [1] Tablas para el cálculo de placas y vigas pared, R. Bareš, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1981;
- [2] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, (1984);
- [3] Teoria Elástica Linear de Placas e Lajes, J.A.C. Martins, IST, 1992;
- [4] Theory of Plates and Shells, S.P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, McGraw-Hill, 1970;
- [5] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, (1971).
- [6] Betão Armado II - Vol. I, Grupo de Betão Armado e Pré-esforçado, Secção de Folhas da AEIST, 1989;
- [7] Vocabulário da Teoria das Estruturas, LNEC, Norma Portuguesa NP-761, 1969;
- [8] Carlos Tiago Fernandes, “Utlização e Desenvolvimento de uma Formulação Indirecta de Trefftz na Análise de Lajes Finas”, dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, 1998
- [9] Sulumine Raul, “Métodos de Análise Elástica de Lajes de Edifícios”, dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, 1998;
- [10] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill International Book Company, Tokyo, 1982;